二次元リボン結び目のもろて型

安　田　智　之*

Amphicheirality of ribbon ２-knots

Tomoyuki Yasuda*

二次元リボン結び目の対称性については，以下の様な事実が知られている。まず，四次元ユークリッド空間内において，三次元ユークリッド空間に対して対称な位置における。[1] また，(－) もろて型であることがMarumotoによって示されている。[1] 従って二次元リボン結び目に関しては，(＋) もろて型であることと可逆的であることとは同義となる。そこで，(＋) もろて型に関してであるが，まず，(＋) もろて型でない，即ち非可逆な二次元リボン結び目の存在することは，Kinoshitaによって示されている。[1] 自明な二次元リボン結び目を除くと，最も単純な (＋) もろて型でない，即ち非可逆な二次元リボン結び目は，最小交差数が２である 2_2 二次元リボン結び目である。[2],[3] 因みに一次元結び目で，自明な結び目を除いた最も単純な非可逆結び目は，最小交点数が８である 8_{17} 結び目であることがよく知られている。[4] 一方，スパン結び目と呼ばれる二次元結び目は二次元リボン結び目であるが，スパン結び目は (＋) もろて型である。[5],[6]

さて，ここでは二次元リボン結び目の (＋) もろて型をリボン表示の観点から考えてみる。リボン表示の最も基本的なクラスは２ベースリボン表示であるので，特にこれに注目したい。２ベースリボン表示をもち (＋) もろて型であるようなものに，二橋結び目のスパン結び目がある。[7],[8] その２ベースリボン表示は今のところ各二次元リボン結び目に対し高々２種類しか知られていない。[8] ところが，それらはいずれも二橋結び目のSchubert標準形から自然に得られる２ベースリボン表示であり，これらを含め既知の (＋) もろて型である２ベース二次元リボン結び目の２ベースリボン表示はすべて，(＋) もろて型リボン表示なるリボン表示に属するものであった。従って (＋) もろて型である２ベース二次元リボン結び目の２ベースリボン表示は (＋) もろて型リボン表示に限るということが予想されてきた。このことに関し本論文では次のことを主張し証明を行う。

定理　(＋) もろて型である二次元リボン結び目であっても，(＋) もろて型リボン表示でない２ベースリボン表示をもつようなものが存在する。

１．準　　備

１．１　定　　義

$\{D^3_\mu \mid \mu=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ を互いに交わらない四次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ 内の三次元球体の族とする。また，$\partial D^3_\mu = D^2_\mu$ とおく。一方，$f^r_{i_r j_r} : D^2 \times I \to \boldsymbol{R}^4$（$r=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$；$i_r,\ j_r = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）を，像が互いに交わらない埋め込みの族とし，かつ，次の性質（１),（２）を満たすものとする。但し D^2 は二次元球体，$I=[0,\ 1]$ である。

（１）
$$f^r_{i_r j_r}(D^2\times I)\cap O^2_\mu = \begin{cases} f^r_{i_r j_r}(D^2\times\{0\}) & (i_r=\mu) \\ f^r_{i_r j_r}(D^2\times\{1\}) & (j_r=\mu) \\ \phi & (\text{その他}) \end{cases}$$

（２）
$$\Big(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2\times I)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\Big) \quad \text{は連結。}$$

ここで K^2 を二次元球面

$$\Big(\bigcup_{\mu=1}^{m} O^2_\mu\Big)\cup\Big(\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(\partial D^2\times I)\Big)-\mathring{T}$$

とする。但し $T=\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2\times\partial I)$ であり $\mathring{T}$ は T の内部を表す。この時，K^2 のことを二次元リボン結び目と呼ぶ。

１．２　定　　義

$\mathscr{O}=\bigcup_{\mu=1}^{m} D^3_\mu$，$\mathscr{B}=\bigcup_{r=1}^{m-1} f^r_{i_r j_r}(D^2\times I)$ とおくとき

$(\mathscr{O},\ \mathscr{B})$ のことを二次元リボン結び目 K^2 に対する m ベースリボン表示（或いは単にリボン表示）と呼ぶ。また $\mathscr{O}$ をベース，$\mathscr{B}$ をバンドと呼ぶ。更に，二次元リボン結び目 K^2 に対するすべてのリボン表示を考えた上でのベース数の最小数のことを K^2 のベース指数と呼び $b(K^2)$ で表す。このとき K^2 は $b(K^2)$ ベース二次元リボン結び目であるという。

１．３　定　　義

$l_r = f^r_{i_r j_r}(\{0\}\times I)$（$r=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$）とおく。但し $\{0\}$ は D^2 の中心点である。ここで各 l_r が $\mathscr{O}$ に

＊奈良工業高等専門学校

平成13年９月28日受理

有限個の点で垂直に交わるとしてよい。これらの点を各 l_r の方向に従って a_{r1}，a_{r2}，…，a_{rs_r} とし（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）のリボン交差と呼ぶ。但し各 l_r の方向は $O^2_{i_r}$ から $O^2_{j_r}$ へ向かう方向とする。この時 $n=\sum_{r=1}^{m-1} s_r$ をリボン表示（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）のリボン交差数と呼び，（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）は n 交差リボン表示であるという。そうして K^2 に対する総てのリボン表示を考えた上でのリボン交差の最小数のことを K^2 の最小交差数（或いは単に交差数）と呼び $cr(K^2)$ で表す。

１．４　定　　義

a_{r1}，a_{r2}，…，a_{rs_r} に対応して，s_r 個の文字からなる語 w_r をつくる。つくり方は l_r が D^3_μ に点 a_{rv}（v＝１，２，…，s_r）で正の側から交わるとき，w_r の v 番目の文字を x_μ，負の側から交わるときは同様 x_μ^{-1} とするものとする。つくられた語 w_1，w_2，…，w_{m-1} を利用して K^2 の結び目群 $\pi_1(\boldsymbol{R}^4-K^2)$ の群表示を次の様に構成できる。

（１．５）
$$[x_\mu;\mu=1,2,\cdots,m \mid x_{i_r}w_r x_{j_r}^{-1}w_r;\ r=1,2,\cdots,m-1]$$

但し各 x_μ は O^2_μ のメリディアン生成元とする。[9] 以上の様な構成法でリボン表示（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）から得られた群表示（１．５）のことを（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）に関連したリボン群表示と呼ぶ。また各 w_r のことをこのリボン群表示の語と呼ぶ。一方，リボン群表示（１．５）からは，逆の手順でリボン表示（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）を定められるので（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）のことをリボン群表示（１．５）に関連したリボン表示と呼ぶ。

１．６　定　　義

$\boldsymbol{R}^3_+$ を $\boldsymbol{R}^4$ 内において x_4＝０，x_3≧０によって定義される $\boldsymbol{R}^3$ の上半空間とし，$\boldsymbol{R}^3_-$ を $\boldsymbol{R}^4$ 内において x_4＝０，x_3≦０によって定義される $\boldsymbol{R}^3$ の下半空間とする。ここで $\boldsymbol{R}^3_+$ を方程式，$x_1{}'=x_1$，$x_2{}'=x_2$，$x_3{}'=x_3\cos\theta-x_4\sin\theta$，$x_4{}'=x_3\sin\theta+x_4\cos\theta$ に従って回転させる。この時 $\boldsymbol{R}^2$ を $x_3=x_4=0$ と定めれば $\boldsymbol{R}^3_+$ は $\boldsymbol{R}^2$ について回転することになる。今，$\boldsymbol{R}^3$ 内の一次元結び目 k^1 を $k^1\cap\boldsymbol{R}^3_-$ がプロパーに埋め込まれた自明な弧であるように置いておく。この時，$k^1\cap\boldsymbol{R}^3_+$ を上述の回転の方程式に従って回転させた時に構成される二次元結び目を k^1 のスパン結び目と呼び，spun(k^1) で表す。[1],[10],[11]

１．７　定　　義

二次元リボン結び目 K^2 に対しその鏡像を $(K^2)^*$ とし，結び目に入れられた方向を逆転したものを $-K^2$ とするとき $K^2\sim(K^2)^*$ ならば K^2 は（＋）もろて型であるといい，$K^2\sim-(K^2)^*$ ならば（－）もろて型であるという。また $K^2\sim-K^2$ ならば可逆的であるという。

１．８　定　　義

リボン表示（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）に関連したリボン群表示を G とする。ベースの各成分に対応する G の生成元 x_1，x_2，…，x_m の名前の適当な入換えや，バンド各成分の方向逆転を適当に行ってそれに対応するリボン群表示 G' をつくる。その上で G' の語を構成する文字 x_i を一斉に x_i^{-1} にするという操作でリボン群表示 G'' をつくる。

以上の構成で新たにつくられるリボン群表示 G'' を G と同一にできるとき，G は（＋）もろて型リボン群表示であるという。

２．定理の証明

（＋）もろて型の定義（１．７）と（＋）もろて型リボン群表示の定義（１．８）により次のことはすぐ分る。

２．１　補　　題

（＋）もろて型リボン群表示に関連したリボン表示をもつ二次元リボン結び目は（＋）もろて型である。

２．２　例

3_1結び目[12] に対し spun(3_1) 則ち 2_1二次元リボン結び目[2],[3] のリボン表示として次のリボン群表示に関連したリボン表示（$\mathscr{O}_1$，$\mathscr{B}_1$）をとる。

$$G_1=[x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}]$$

（$\mathscr{O}_1$，$\mathscr{B}_1$）の二つのベースに対応する生成元の名前を入れかえると次のリボン群表示を得る。

$$G_2=[x_2,x_1 \mid x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}]$$

これに関連したリボン表示を（$\mathscr{O}_2$，$\mathscr{B}_2$）とする。（$\mathscr{O}_2$，$\mathscr{B}_2$）のバンドの方向を逆にすると次のリボン群表示に関連したリボン表示（$\mathscr{O}_3$，$\mathscr{B}_3$）を得る。

$$G_3=[x_1,x_2 \mid x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2]$$

G_3 の語 $x_2^{-1}x_1^{-1}$ において x_1^{-1} を x_1 にて x_2^{-1} を x_2 にかえたリボン群表示は次のようになる。

$$G_4=[x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}]$$

これは G_1 と同一のリボン表示である。従って spun(3_1) は（＋）もろて型である。

２．３　定理の証明

次のリボン群表示は（＋）もろて型リボン表示でない。

$$G=[x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1\\ x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}]$$

ところが G に関連したリボン表示を（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$），このリボン表示をもつ二次元リボン結び目を K^2 とおくと，実はこの２ベース二次元リボン結び目 K^2 は（＋）もろて

型である。何故なら（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）に６回の安定同値変形[7]を施すことにより（＋）もろて型リボン群表示 G' に関連したリボン表示（$\mathscr{O}'$，$\mathscr{B}'$）を得るからである。安定同値変形は結び目型を変えないので，（$\mathscr{O}'$，$\mathscr{B}'$）は K^2 のリボン表示であり，従って補題（２．１）より K^2 が（＋）もろて型であるといえる。以下（$\mathscr{O}$，$\mathscr{B}$）から（$\mathscr{O}'$，$\mathscr{B}'$）に至る６回の安定同値変形を，それに対応するリボン群表示の同型変形で示す。ここで $\cong$ は群の同型を表す。

$$
\begin{aligned}
G &\cong [x_1,x_2,x_3 \mid \\
&\quad x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} \\
&\quad x_2^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}, \\
&\quad x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}] \\
&\cong [x_1,x_2,x_3 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1}, \\
&\qquad x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1}] \\
&\cong [x_1,x_2,x_3,x_4 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1}, \\
&\qquad x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_3^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1x_2^{-1} \\
&\qquad x_1x_2x_1x_2^{-1}x_4^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}] \\
&\cong [x_1,x_2,x_3,x_4 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1},\ x_1x_4^{-1}x_3^{-1}x_4, \\
&\qquad x_1x_2x_1x_2^{-1}x_4^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}] \\
&\cong [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1},\ x_1x_4^{-1}x_3^{-1}x_4, \\
&\qquad x_1x_2x_1x_2^{-1}x_4^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}, \\
&\qquad x_1x_2^{-1}x_5^{-1}x_2] \\
&\cong [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \mid x_1x_3x_2^{-1}x_3^{-1},\ x_1x_4^{-1}x_3^{-1}x_4, \\
&\qquad x_1x_5x_4^{-1}x_5^{-1},\ x_1x_2^{-1}x_5^{-1}x_2] \\
&= G'
\end{aligned}
$$

（証了）

参考文献

［１］Suzuki, S., Knotting problems of ２-spheres in ４-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ. ４（1976），241－371.

［２］安田智之，二次元リボン結び目の最小交差数とベース数，「結び目の不変量と幾何構造」研究集会報告集（2000），98－106.

［３］Yasuda, T., Crossing and base numbers of ribbon ２-knots, preprint. J. Knot Theory Ramifications 10（2001），999－1003.

［４］河内明夫編，結び目理論（1990），シュプリンガー・フェアラーク東京.

［５］Satoh, S., Virtual knot presentation of ribbon torus-knots, J. Knot Theory Ramifications ９（2000），531－542.

［６］安田智之，スパン結び目のリボン表現ともろて型，奈良工業高等専門学校研究紀要第36号（2000），117－121.

［７］Marumoto, Y., Stably equivalence of ribbon presentations, J. Knot Theory Ramifications １（1992），241－251.

［８］Yasuda, T., Ribbon knots with two ribbon types, J. Knot Theory Ramifications １（1992），477－482.

［９］Yajima, T., On characterization of knot groups of some spheres in R^4, Osaka J. Math. ６（1969），435－446.

［10］Andrew, J.J.; Curtis, M.L., Knotted ２-spheres in ４-sphere, Ann. Math. 70（1959），565－571.

［11］Kanenobu, T.; Marumoto, Y., Unknotting and fusion numbers of ribbon ２-knots, Osaka J. Math. 34（1997），525－540.

［12］Rolfsen, D., Knots and Links, Math. Lecture Series ７, Publish and Perish Inc., Berkley, 1976.