

# 孔を有する中空丸棒の引張り

鶴 秀登\*・金本 健児\*\*・濱中 敬司\*\*\*

## Stress Concentration of Hollow Cylinder With a Circular Hole Under Tension

Hideto Tsuru\*, Kenji Kanemoto\*\* and Keiji Hamanaka\*\*\*

### Abstract

The problems of stress concentration in the case of a hollow cylinder with a circular hole under uniform tension are analyzed by the FEM. Numerical calculations are done for various combinations of the size of hole and the thickness of hollow cylinder. As a result of the systematic calculation, it is found that maximum circumferential stress at the edge of hole occurs below the outer surface in the case of the thick cylinder, but in the case of thin cylinder below the inner surface. And the stress distribution of a hollow cylinder with a hole is compared with that of a plate in the case of the same thickness and the same diameter of hole. It is found that stress distribution on the edge of hole of hollow cylinder differs from that of plate in the case of a large hole.

### 1. 緒言

機械や構造物において負荷時の部材の無理な変形や破損は避けなければならない問題である。この変形や破損は材料の剛性と強度を知ることによって予防でき、部材破損による事故などを防ぐことができる。材料の強度を知るために多種多様な実験が行われているが、多くの経費と時間、実験装置が必要となる。そこで有限要素法 (Finite Element Method) を用いた解析ソフトによるシミュレーション技術が広く普及し、実験解析結果をシミュレーションに利用することでより効率の良い強度評価を得ることができるようになってきた。

本研究では、孔を有する中空丸棒の引張りにおける応力集中問題を市販のプリポストプロセッサとソルバーを用いてFEM解析した。そのことによってソフトの利用技術の習得と、構造物の応力集中現象の理解、さらに解析経験の機会を多くもつことで強度評価周辺の工学的知識を高めることも目的とした。なお、応力集中現象は構造物の破壊防止の観点から大変重要なことである [1] [2]。

具体的には、貫通孔を有する中空丸棒の引張りにおける応力集中現象を取り扱い、破損の一次因子となる孔縁の荷重方向最大引張応力についてまとめ、応力集中係数への孔の大きさと中空丸棒の肉厚

の影響を調べた。なお最大応力が生じる位置を知るために孔縁の深さ方向の応力分布についても検討した。さらに、同じ厚さで孔をもつ平板の応力分布とも比較した。

### 2. 数値解析

Fig. 1 に示すような孔 (直径  $d$ ) を有する長さ  $L$  の中空丸棒 (外径  $D_0$ , 内径  $D_1$ ) が、その長手方向に引張りを受ける問題を取扱った。具体的な数値は  $D_0=100\text{mm}$ ,  $L=200\text{mm}$  とし、孔径  $d$  と中空丸棒内径  $D_1$  を種々変化させて応力分布と応力集中係数への影響を検討した。数値計算上、材料の縦弾性係数  $E=206 \times 10^3 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ , ポアソン比  $\nu=0.3$  とした。なお弾性応力問題とし、孔縁の最小断面に生じる荷重方向の垂直応力  $\sigma_z$  のみを取り扱った。また数値計算はその対称性から  $1/4$  の領域で行い (Fig. 2), 市販のプリポストプロセッサ MSC.Patran とソルバー MSC.Nastran の四面体要素, 10 節点を用いて行った。解析結果の整理には次式で示される応力集中係数を用いた。

$$\alpha = \frac{(\sigma_z)_{\max}}{\sigma_0} \dots (1)$$

$$\alpha' = \frac{(\sigma_z)_{\max}}{\sigma'_0} \dots (2)$$

\* 電子機械工学科

\*\* 専攻科生産システム工学専攻 2 年

\*\*\* 専攻科生産システム工学専攻 1 年

なお  $\sigma_0$  は端面の負荷応力,  $\sigma'_0$  は荷重に垂直な切欠き最小断面積  $A'_0$  における次式の公称応力である。

$$\sigma'_0 = \frac{\pi(D_0^2 - D_1^2)}{4A'_0} \sigma_0 \dots (3)$$

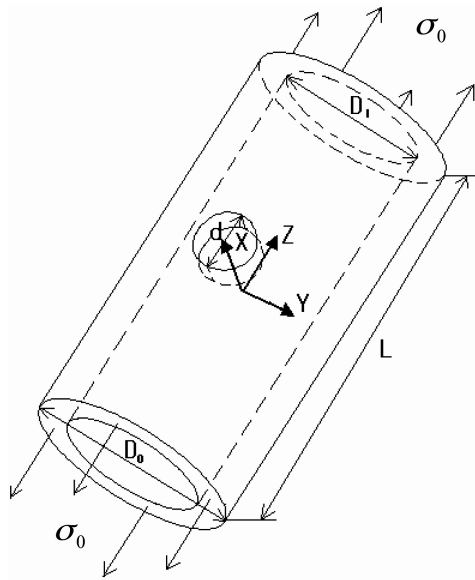


Fig.1 貫通孔をもつ中空丸棒の引張り

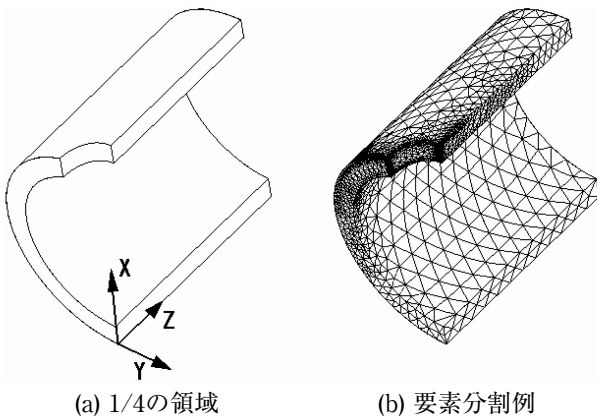


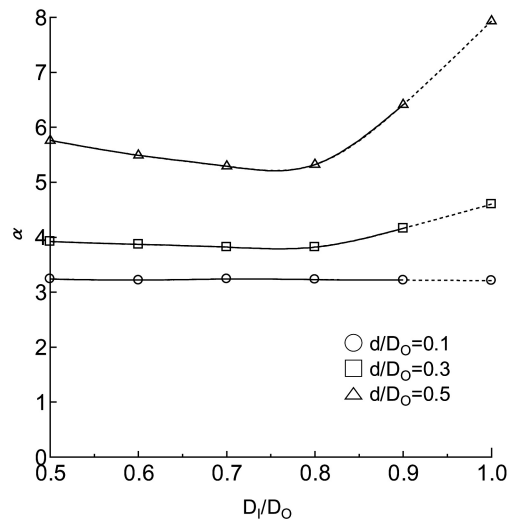
Fig.2 解析領域

### 3. 数値計算と結果の検討

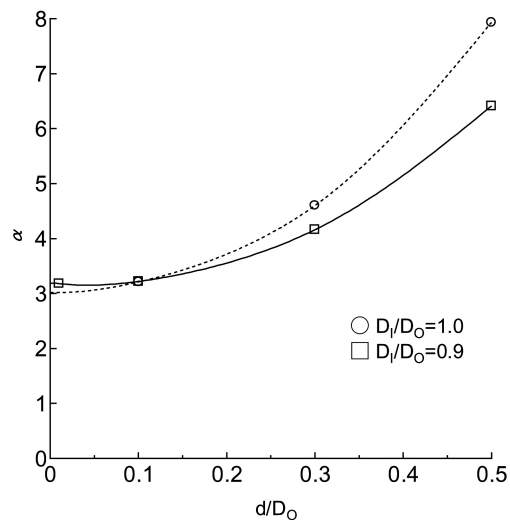
#### 3.1 解析精度および要素分割

二次元問題で円孔をもつ無限板を一方方向に応力  $\sigma_0$  で引張る場合, 引張り方向に垂直な孔縁に最大応力が生じ, その応力は  $\sigma_{max} = 3\sigma_0$  となる。しかし, 実際の問題は三次元で有限寸法の問題になるため, 板幅

と板厚の影響などで最大応力は  $3\sigma_0$  とはならない<sup>[3]</sup>。このことを考慮して, 本研究のFEM解析による解の精度を推定した。すなわち孔径  $d$  が中空丸棒の外径  $D_0$  に比べ十分小さい場合, 孔の応力集中には中空丸棒の曲率の影響が無くなり, 貫通孔を有する平板の応力集中に近づく。そして, 内外径比  $D_1/D_0 = 1.0$  の極限では応力集中係数  $\alpha = 3$  になる。このことを Fig.3 (a), (b) に示す。孔をもつ中空丸棒の結果を, (a) は縦軸に応力集中係数  $\alpha$ , 横軸に内外径比  $D_1/D_0$  を取り, 孔径比  $d/D_0$  をパラメータにして示す。  $D_1/D_0 = 1.0$  の結果は計算可能で解が安定している  $D_1/D_0 = 0.9$  までの結果を外挿して求めた。次にこの結果を用い, パラメータと横軸を入れ替えて整理し



(a)  $\alpha$  と内外径比  $D_1/D_0$  の関係



(b)  $\alpha$  と孔径比  $d/D_0$  の関係

Fig.3 精度評価

た $D_1/D_0=1.0$ ,  $0.9$ の結果を (b) に示す。 $D_1/D_0=1.0$ の曲線は前述の通り $d/D_0 \rightarrow 0$ で無理なく $\alpha = 3$ に近づいている。このことから、肉厚が薄い場合の精度も良好であると推定できる。なお、肉厚がある $D_1/D_0=0.9$ の場合、板厚の影響が出てくる<sup>[3][4]</sup>。またこれらの計算から、本計算でもTable 1に示す孔

縁と孔深さの分割を行い、要素のサイズが一定になるようにした。

### 3. 2 孔深さ方向の応力変化

まず最小断面の孔縁に生じる孔深さ方向の応力分布の変化について検討した。重要な荷重方向応力 $\sigma_z$ の無次元応力 $\sigma_z/\sigma_0'$ の分布をFig. 4 ~ Fig. 7に、横軸に中空丸棒外周から内周へ孔の深さの位置を示す無次元座標を取り、孔径比 $d/D_0$ をパラメータとして各中空丸棒の内外径比 $D_1/D_0=0.9, 0.7, 0.5, 0.0$ の場合を示す。なお、Fig. 7の $D_1/D_0=0.0$ は中空丸棒の非貫通孔（孔深さ $D_0/2$ ）の結果となる。図からわかるように内外径比 $D_1/D_0=0.9$ の肉厚が薄く孔径が大きい問題では、内周表面付近に最大応力が生じ

Table 1 中空丸棒で用いた要素分割数

$d/D_0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
孔縁	10	20	30	40	50

$D_1/D_0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
孔深さ	20	40	60	80	100

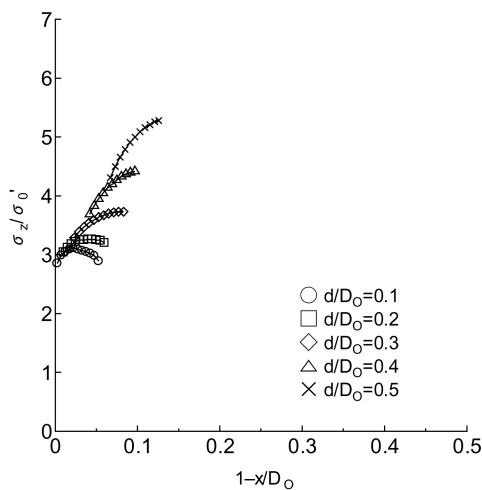


Fig.4 孔縁の深さ方向の応力 $\sigma_z$ の変化 (内外径比  $D_1/D_0=0.9$ )

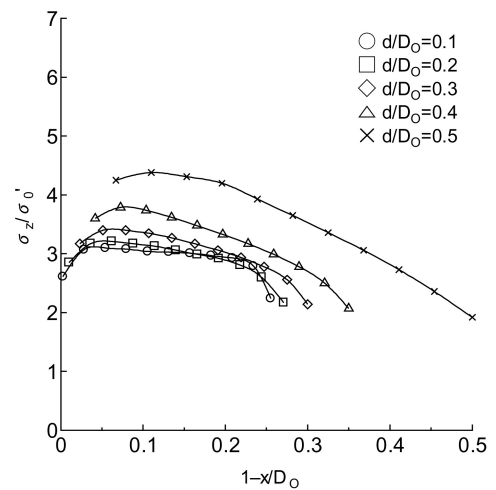


Fig.6 孔縁の深さ方向の応力 $\sigma_z$ の変化 (内外径比  $D_1/D_0=0.5$ )

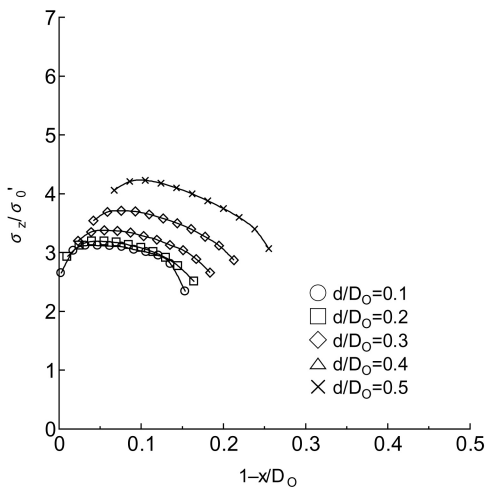


Fig.5 孔縁の深さ方向の応力 $\sigma_z$ の変化 (内外径比  $D_1/D_0=0.7$ )

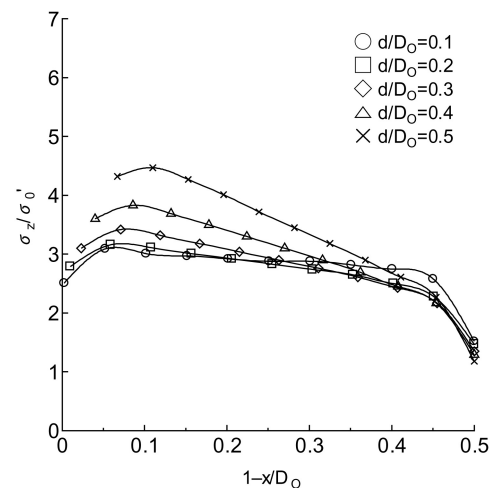


Fig.7 孔縁の深さ方向の応力 $\sigma_z$ の変化 (内外径比  $D_1/D_0=0.0$ )

るが、特に肉厚が薄い場合は、外周表面よりやや内側の孔縁で最大応力が生じている。また孔径が小さい場合に注目すると、孔深さ方向の応力変化が小さく、中空丸棒の内外周表面付近以外の応力は肉厚に関係なくほぼ一定の値となっている。

次にFig. 8～12に内外径比 $D_i/D_0$ をパラメータとし、孔径比 $d/D_0$ ごとの丸棒最小断面に生じる孔縁の孔深さ方向応力分布を示す。丸棒外周から孔の深さ方向の応力分布は孔径が小さくなるほど、内外周表面近傍では内外径比に関係なく類似している。また、内外径比に関係なく孔縁の深さ方向の最大応力は各孔径比ごとに外周表面からほぼ同じ深さ位置の比に現れることがわかる。

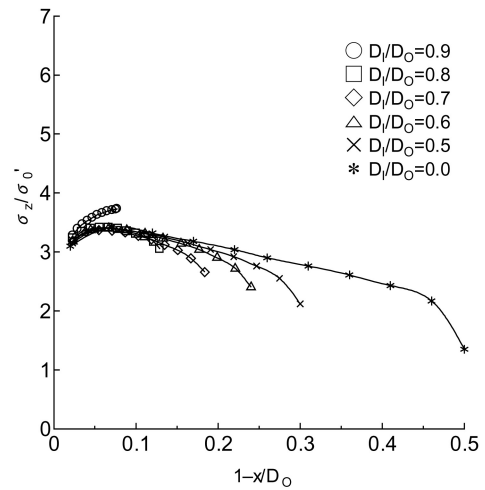


Fig.10 孔縁の深さ方向の応力  $\sigma_z$  の変化 ( $d/D_0=0.3$ )

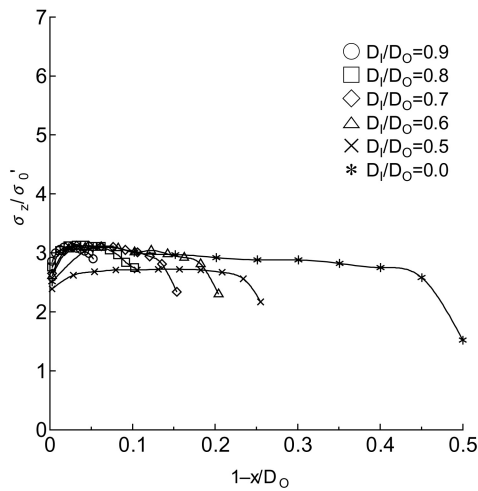


Fig.8 孔縁の深さ方向の応力  $\sigma_z$  の変化 ( $d/D_0=0.1$ )

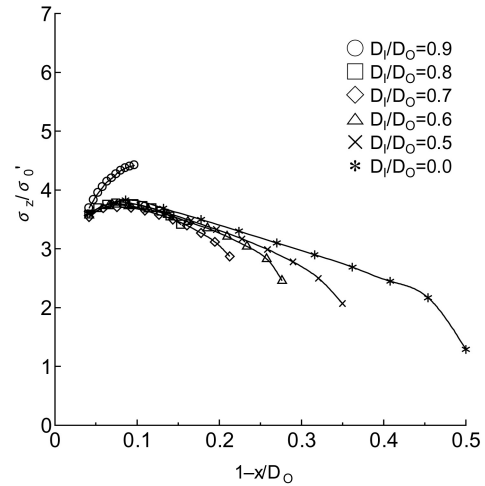


Fig.11 孔縁の深さ方向の応力  $\sigma_z$  の変化 ( $d/D_0=0.4$ )

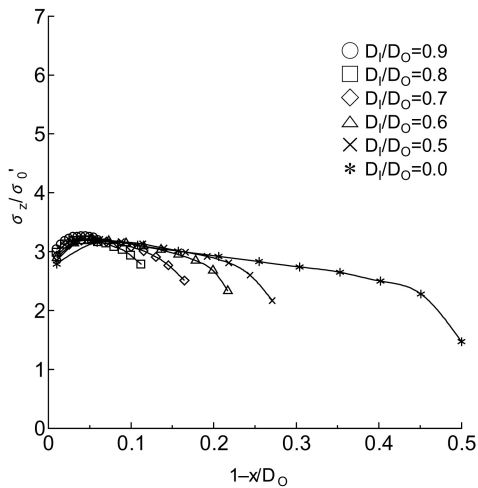


Fig.9 孔縁の深さ方向の応力  $\sigma_z$  の変化 ( $d/D_0=0.2$ )

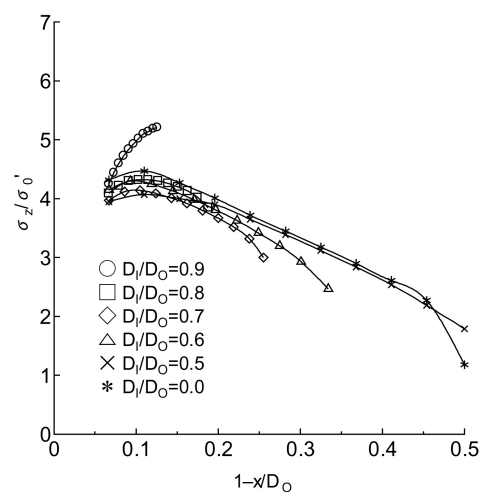


Fig.12 孔縁の深さ方向の応力  $\sigma_z$  の変化 ( $d/D_0=0.5$ )

### 3. 3 中空丸棒と平板の応力分布

Fig.13に示す貫通孔をもつ中空丸棒と貫通孔をもつ直径と同じ板幅、同じ肉厚の平板が、一様引張りを受ける場合の孔縁の孔深さ方向応力分布を比較し、曲面の影響について検討した。なお、この問題では座標の原点を孔中央の外周上においた (Fig.13)。結果をFig.14~Fig.16に示す。横軸に外周表面からの孔の深さ位置を示す無次元量を取り、パラメータに肉厚を表わす無次元量  $t/D_0$  を用い、孔径比  $d/D_0=0.1, 0.3, 0.5$  の各場合の無次元応力  $\sigma_z/\sigma_0'$  を示す。

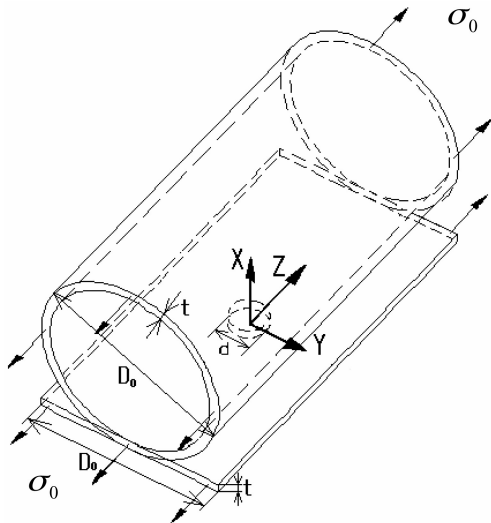


Fig.13 中空丸棒と薄板を組合せた原点

Fig.14に孔径比の小さい  $d/D_0=0.1$  の結果を示す。孔が小さければ中空丸棒の曲率の影響がなくなり、平板の応力分布に近づくことがわかる。Fig.15は  $d/D_0=0.3$  の場合で、最大応力が出る深さ位置の比と値に差が生じてきている。Fig.16の  $d/D_0=0.5$  の結果を見ると、差異が鮮明で中空丸棒の応力の最大値がさらに大きくなってきている。これは孔径が大きくなるにつれ中空丸棒の相対的な曲率の影響が大きくなるとともに、形状のx軸方向非対称による中空丸棒の変形が大きくなり平板の応力分布と大きく異なってきたためと考えられる。

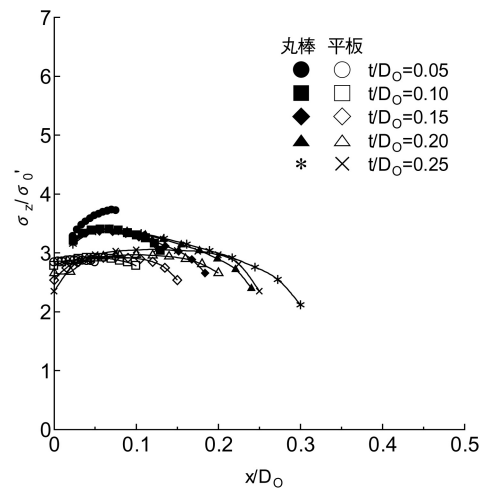


Fig.15 孔縁の深さ方向無次元応力 (孔径比  $d/D_0=0.3$ )

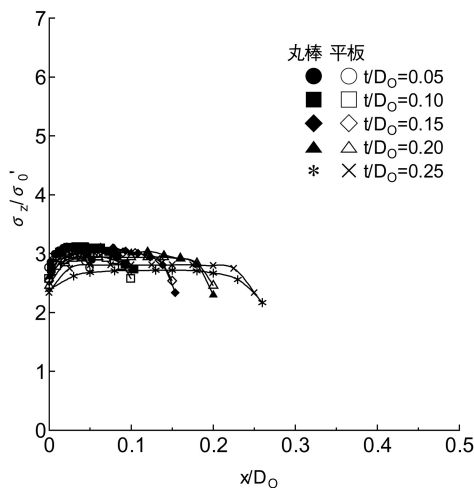


Fig.14 孔縁の深さ方向無次元応力 (孔径比  $d/D_0=0.1$ )

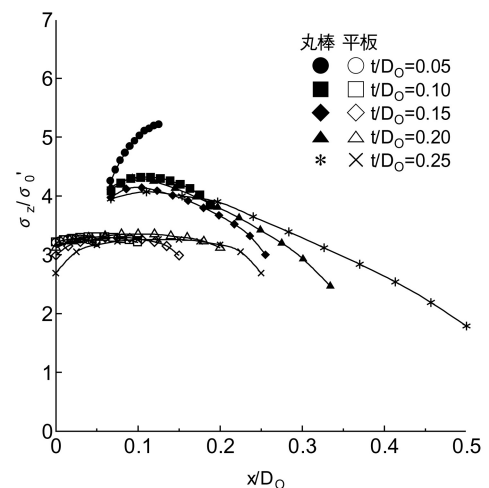


Fig.16 孔縁の深さ方向無次元応力 (孔径比  $d/D_0=0.5$ )

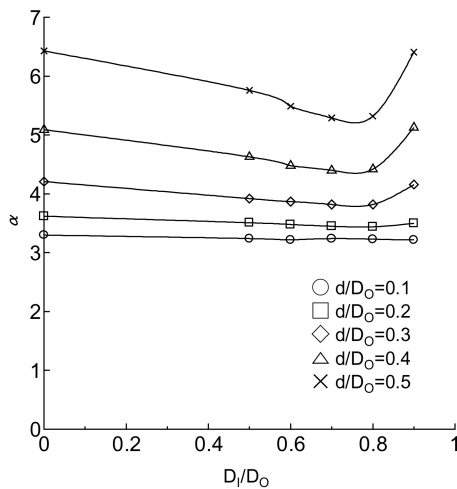
3. 4 応力集中係数

Fig.17, 18に中空丸棒の孔縁の最小断面における荷重方向応力  $\sigma_z$  の最大値を式 (1) と (2) の無次元表示 (応力集中係数  $\alpha$  と  $\alpha'$ ) で示す。そしてこれらの数値結果をTable 2 ~Table 5 に示した。

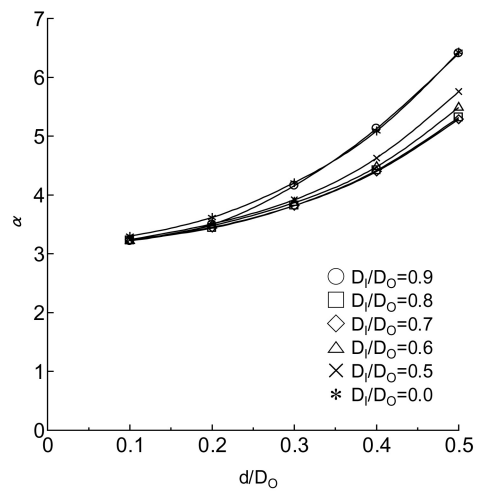
Fig.17は横軸に内外径比  $D_1/D_0$  を取り、孔径比  $d/D_0$  をパラメータとして示す。孔が小さくなるにつれ内外径比  $D_1/D_0$  に関係なく応力集中係数  $\alpha$ ,  $\alpha'$  が各孔径比でほぼ一定の値になることがわかる。

また、肉厚が薄く、孔径が大きくなると  $\alpha$ ,  $\alpha'$  は急に大きくなって来る。

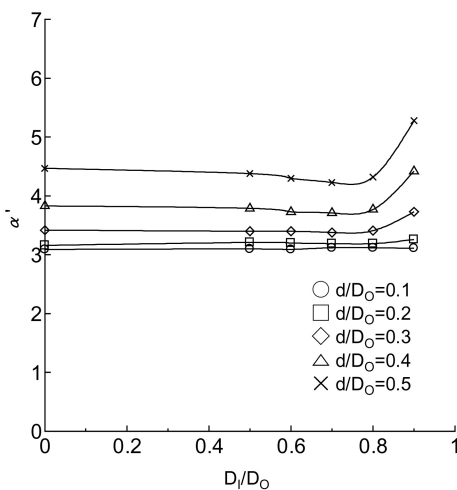
Fig.18は横軸に  $d/D_0$  を取り、 $D_1/D_0$  をパラメータとして示す。肉厚の広い範囲で  $\alpha$ ,  $\alpha'$  とともに計算結果の最も小さい値に対して最大25%程度の差異しかない。なお、 $d/D_0=0$ では肉厚0の極限 ( $D_1/D_0=1.0$ ) においてのみ  $\alpha=\alpha'=3$  となる [3] [4]。



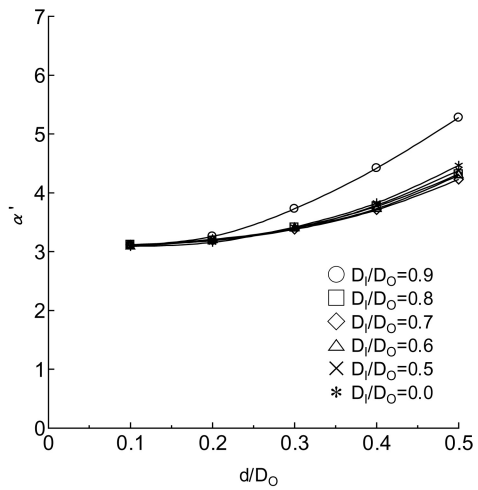
(a)  $\alpha$  と内外径比  $D_1/D_0$  の関係



(a)  $\alpha$  と孔径比  $d/D_0$  の関係



(b)  $\alpha'$  と内外径比  $D_1/D_0$  の関係



(b)  $\alpha'$  と孔径比  $d/D_0$  の関係

Fig.17 応力集中係数  $\alpha$  と  $\alpha'$

Fig.18 応力集中係数  $\alpha$  と  $\alpha'$

**Table 2**  $\alpha$  と内外径比 $D_1/D_0$ の数値表

$\alpha$	孔径比				
	$d/D_0=0.1$	$d/D_0=0.2$	$d/D_0=0.3$	$d/D_0=0.4$	$d/D_0=0.5$
内外径比					
0.90	3.22	3.50	4.16	5.13	6.41
0.80	3.23	3.44	3.82	4.42	5.32
0.70	3.24	3.45	3.82	4.40	5.29
0.60	3.22	3.48	3.87	4.48	5.49
0.50	3.24	3.51	3.92	4.63	5.76
0.00	3.30	3.62	4.21	5.09	6.43

**Table 3**  $\alpha'$  と内外径比 $D_1/D_0$ の数値表

$\alpha'$	孔径比				
	$d/D_0=0.1$	$d/D_0=0.2$	$d/D_0=0.3$	$d/D_0=0.4$	$d/D_0=0.5$
内外径比					
0.90	3.11	3.26	3.73	4.42	5.28
0.80	3.12	3.19	3.41	3.77	4.32
0.70	3.12	3.19	3.38	3.71	4.23
0.60	3.09	3.20	3.40	3.73	4.30
0.50	3.10	3.21	3.40	3.79	4.38
0.00	3.09	3.16	3.42	3.83	4.47

**Table 4**  $\alpha$  と孔径比 $d/D_0$ の数値表

$\alpha$	内外径比					
	$D_1/D_0=0.9$	$D_1/D_0=0.8$	$D_1/D_0=0.7$	$D_1/D_0=0.6$	$D_1/D_0=0.5$	$D_1/D_0=0.0$
孔径比						
0.10	3.22	3.23	3.24	3.22	3.24	3.30
0.20	3.50	3.44	3.45	3.48	3.51	3.62
0.30	4.16	3.82	3.82	3.87	3.92	4.21
0.40	5.13	4.42	4.40	4.48	4.63	5.09
0.50	6.41	5.32	5.29	5.49	5.76	6.43

**Table 5**  $\alpha'$  と孔径比 $d/D_0$ の数値表

$\alpha'$	内外径比					
	$D_1/D_0=0.9$	$D_1/D_0=0.8$	$D_1/D_0=0.7$	$D_1/D_0=0.6$	$D_1/D_0=0.5$	$D_1/D_0=0.0$
孔径比						
0.10	3.11	3.12	3.12	3.09	3.10	3.09
0.20	3.26	3.19	3.19	3.20	3.21	3.16
0.30	3.73	3.41	3.38	3.40	3.40	3.42
0.40	4.42	3.77	3.71	3.73	3.79	3.83
0.50	5.28	4.32	4.23	4.30	4.38	4.47

#### 4. 結 言

貫通孔を有する中空丸棒の一樣引張り問題における応力集中現象を市販のFEMソフト（MSC.Patran, MSC.Nastran）を用いて解析した。破損の一次因子となる孔縁の荷重方向最大引張応力についてまとめ、応力集中係数への孔の大きさと中空丸棒の肉厚の影響を調べた。得られた結果を以下に示す。

- ・ 応力分布は孔径比が大きくなるほど孔深さ方向応力分布の変化が大きくなる。
- ・ 孔縁の最大応力が出る深さ位置の比は内外径比に関係なく孔径比によってほぼ決まる。
- ・ 同じ肉厚と孔径をもつ中空丸棒と平板の応力分布を比較すると、孔径が小さい場合、孔深さ方向応力分布は変化が小さくなり中空丸棒と平板の応力分布はほぼ一致する。しかし、孔径が大きくなると丸棒の曲率と切欠き欠陥による非対称性のため平板の結果より大きくなる。
- ・ 応力集中係数は孔径が小さくなるにつれ、内外径比に関係なく孔径比ごとにほぼ一定となる。

#### 参考文献

- [1] 西谷：日本機械学会論文集（A編），48巻，447号PP.1353～1359，（昭58-11）。
- [2] 村上敬宜：応力集中の考え方（養賢堂）2005-7。
- [3] 中原一郎：材料力学上巻（養賢堂），（昭43-10）。
- [4] 鶴秀登・大塚哲弥・濱中敬司・ズルアズリ：弓削商船高等専門学校紀要，第29号，PP.77～82，（2007-2）。

