

間接フィードバック制御による 振り子の振動制御

園部 元康*・東 正樹**

Vibration Control of a Pendulum by Indirect Feedback Control

Motomichi Sonobe*, Masaki Higashi**

Abstract

There are some approaches to control the vibration of a pendulum. Our control model is composed of a pendulum and cart in a cart-type single pendulum system. However, our control method suggested in this report removes the pendulum from control model, and give the reference motions to state variables of the cart in order to control the vibration of pendulum. The reference motions are defined by Jacobian elliptic function which shows the solution of the free vibration of a pendulum. Consequently, our control system regards vibration control of pendulum as a subsystem which is indirect feedback system. In this report, our control method is formulated and the effectiveness is verified by numerical simulation.

1. 緒 言

クレーンに代表される振り子型構造物の振動制御を行う際の代表的な制御手法として、振り子を最下点付近で近似線形化を行ったシステムに対して線形制御を行う手法^{[1][2]}や、オープンループで状態量を計測することなく振り子の振動を小さく抑える制御軌道を生成する手法^{[3][4]}が一般的である。特に前者は、最適制御理論を適用し各状態量の収束および制御量の大きさに合わせた制御系設計を行うことができる。しかし、振り子の振幅が大きく、非線形特性が強く作用する場合には近似線形化手法はの適用は難しくなる。非線形特性に対する対策としては、部分線形化制御やエネルギー制御法^[5]などの非線形制御手法がある。

これらの制御手法の共通するのは、その制御性能は設計者が与える極配置あるいは評価関数の重みに依存するという点である。これに対して、本研究は極配置や評価関数ではなく、系の力学特性に従って制御を行う手法について検討するものである。振り子の自由振動は、振り子の重さ、長さなどの系パラメータなどによって力学特性が決まっている。その特性に合わせた制御を行うことができれば、自ずからその収束性などの制御性能が決まってくるはずであり、評価関数や極に依存しない制御則が構築できると考えられる。

振り子の振動制御を考える上で、その制御目的を状態量の制御ではなく、振動をより大きく（あるいは、より小さく）することを目指す。その際にブランコの原理でもある共振現象に基づいて、系の力学特性を考慮した制御則を考える。通常の線形系の共振現象は、外力として系の固有振動数と同じ振動数の三角関数を与えることによって引き起こされる。しかし、振り子の場合には非線形システムであるので、三角関数によって共振を引き起こすことができない。本研究では、三角関数の代わりにヤコビの楕円関数^[6]を用いることで、共振に近い状態を実現する。また、一般的には共振とは振動を大きくする現象を指すが、アクチュエータと振り子の位相差を固定することによって、逆に振動を小さくすることも可能となる。

以上のように、本研究では台車と振り子の間に非線形共振現象に類似した運動を引き起こすことで振り子の振動の制御を行う。その際の制御システムは台車のみを制御対象とする制御系を構築し、振り子の運動は台車の運動の目標値に影響を及ぼす間接フィードバック系を採用する。これによって、振り子の振動制御のみならず台車の位置決め制御等との組み合わせが容易になることが期待される。これらの提案する制御手法を、台車型単一倒立振り子モデルの振動制御に適用し、数値

* 電子機械工学科

** 専攻科生産システム工学専攻

シミュレーションによってその有効性の検証を行う。

2. 振り子の振動制御のための台車運動

2.1 制御対象モデル

制御対象モデルを図1に示す。振り子の運動は台車に影響を及ぼさないと仮定すると、運動方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2\xi\zeta\dot{x} &= \xi^2 u \\ -ml \cos \theta \cdot \ddot{x} + (J + ml^2)\ddot{\theta} \\ &+ c\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 m は振り子の質量、 l は回転軸から重心までの長さ、 J は慣性モーメント、 c は振り子の回転に関する粘性減衰係数、 u は制御入力電圧、 g は重力加速度である。また、 ξ および ζ は台車の運動方程式を簡易化するための物理定数である。式(1)の第1式の簡易化は実験機の運動を適切に表現するために行ったものである。

式(1)の第2式について、台車の加速度項が振り子への強制外力 f として作用していると考え、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} (J + ml^2)\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl \sin \theta &= f \\ f &= ml \cos \theta \cdot \ddot{x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)において、強制外力 f が振り子に対して正の仕事を行うと振り子の振動は小さくなり、逆に負の仕事を行うことで振り子の振動を大きくすることができる。

2.2 楕円関数による加速度の導出と仕事率

目標とする振動制御を実現するためには、振り子の運動と同じ周期の運動を台車に与える必要がある。そこで、台車の運動を与える関数を振り子の自由振動解から導出する。

図1のモデルから台車を除き、さらに振り子の減衰がない図2に示す単振り子モデルの運動方程式は次のように表される。

$$\ddot{\theta} + \omega_n^2 \sin \theta = 0, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{J + ml^2}} \quad (3)$$

ここに、 ω_n は振り子の線形固有角振動数である。式(3)に対し、振幅を α rad とする振り子の不減衰自由振動解(角変位, 角速度, 角加速度)はヤコビの楕円関数を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 2 \sin^{-1}(k \operatorname{sn}(\omega_n t, k)) \\ \dot{\theta} &= 2\omega_n k \operatorname{cn}(\omega_n t, k) \\ \ddot{\theta} &= -\omega_n^2 \sin \theta \\ k &= \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

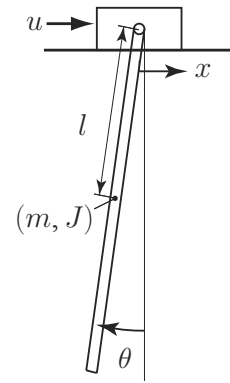


Fig. 1 Single pendulum model

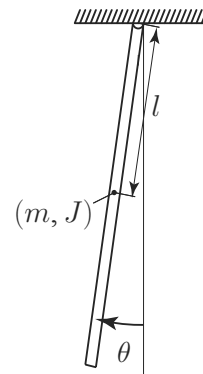


Fig. 2 Simple pendulum model

ここに、 sn および cn はヤコビの楕円関数、 k は楕円関数の母数である。いま、台車の変位が振り子の角速度に同期して動いていると仮定すると、 h を比例定数として $x = h\dot{\theta}$ とおくことができる。この式を簡単にするために、 $h = a/2\omega_n k$ として式(4)の第2式を代入すると、次のようになる。

$$x = \frac{a}{2\omega_n k} \dot{\theta} = a \operatorname{cn}(\omega_n t, k) \quad (5)$$

cn 関数は \cos 関数と似た性質を持ち、 $-1 \leq \operatorname{cn}(\omega_n t, k) \leq 1$ の値域で往復する関数である。したがって、式(5)の a は台車の往復運動の振幅に相当する。式(5)を2階時間微分して台車の加速度を求めると次のようになる。

$$\ddot{x} = -\frac{a\omega_n}{2k} \dot{\theta} \cos \theta \quad (6)$$

台車の運動が式(6)を満たすとき、式(2)の外力項 f は次のようになる。

$$f = -\frac{aml\omega_n}{2k} \dot{\theta} \cos^2 \theta \quad (7)$$

これを式(2)に代入し、外力の振り子に対する仕事率 P を計算すると、次のようになる。

$$P = f\dot{\theta} = -\frac{aml\omega_n}{2k} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \leq 0 \quad (8)$$

したがって、式(5)のように台車変位が cn 関数で動

くようにすれば、台車は振り子に対して $\theta \neq \pm\pi/2$ において負の仕事を与え続ける。すなわち、振り子のエネルギーを減少させ、その振動を小さくすることができる。

2.3 sn 関数と cn 関数の導出

前節では、台車変位を cn 関数で与えることによって振り子の振動を抑える効果が得られることを示した。しかし、cn 関数は具体的に計算することが難しいため、これを実現するためには、式 (5) の台車変位に cn 関数の代わりとなる具体的な関数を与える必要がある。そこで、力学的エネルギーが一定という仮定のもとで、sn 関数および cn 関数を振り子の状態量から導出することを試みる。

式 (3) の運動方程式に対するエネルギー保存の式は次のようになる。

$$\frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \alpha) \quad (9)$$

式 (9) より、次式が得られる。

$$\dot{\theta} = 2\omega_n \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (10)$$

また、楕円関数の母数が $k = \sin(\alpha/2)$ ($0 \leq k \leq 1$) であることを考慮すると、次のようにおくことができる。

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi \quad (11)$$

式 (10) および式 (11) より、次式が得られる。

$$\dot{\theta} = 2\omega_n k \cos \varphi \quad (12)$$

式 (4) の第 2 式と式 (12) を比較より、力学的エネルギーが一定という条件下においては $\text{cn}(\omega_n t, k) = \cos \varphi$ が成り立つことがわかる。

以下では、sn 関数に相当する $\sin \varphi$ と cn 関数に相当する $\cos \varphi$ を状態量の関数として導出する。式 (10) より、 k は次のように求められる。

$$k = \frac{1}{2\omega_n} \sqrt{\left(2\omega_n \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \dot{\theta}^2} \quad (13)$$

式 (12) から、 $\sin \varphi = \sin(\theta/2)/k$ となるので、これに式 (13) を代入することで $\sin \varphi$ および $\cos \varphi$ は次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{2\omega_n \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\left(2\omega_n \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \dot{\theta}^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\left(2\omega_n \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \dot{\theta}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2.4 目標とする台車の運動の表現

2.2 節で述べたように、台車の運動が式 (5) で与えられた場合に振り子の振動を小さくすることができる。式 (5) で与える目標とする台車変位 \bar{x} を式 (14) で導出した $\sin \varphi$ および $\cos \varphi$ を使って表現すると次のようになる。

$$\bar{x} = a \cos(\varphi + \psi) \quad (15)$$

ここに、 a は目標とする台車の往復運動の振幅であり、 ψ は目標に対する変位の位相遅れを補正する定数である。式 (15) を時間微分すると、目標とする台車の速度と加速度は次式で得られる。

$$\dot{\bar{x}} = -a\omega_n \cos \frac{\theta}{2} \sin(\varphi + \psi) \quad (16)$$

式 (16) の導出には式 (11) の 1 階時間微分と式 (12) から得られる次の関係式

$$\dot{\varphi} = \omega_n \cos \frac{\theta}{2} \quad (17)$$

を用いた。

以上より、式 (15) および式 (16) を満たす往復運動を台車にさせることで振り子の振動制御を行う。

3. 単一振り子モデルの制振制御

本章では図 1 の台車駆動型単一振り子モデルの制振制御の場合について、その制御系設計と制御結果について述べる。

3.1 制御系設計

本制御法では、直接の制御対象とするのは台車のみであり、振り子については目標値として間接的にフィードバックを行う形となる。状態方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2\xi\zeta \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi^2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式 (18) に対して、線形フィードバック制御を適用し、極配置によってフィードバックゲイン k_1, k_2 を設計する。台車に振り子を制御するための運動を与えるために、台車の変位と速度を式 (15) および式 (16) から次のように与える。

$$u = -k_1(\dot{x} - \dot{\bar{x}}) - k_2(x - \bar{x}) \quad (19)$$

これが本制御法による直接フィードバックの部分であり、振り子からの出力は目標値 $(\bar{x}, \dot{\bar{x}})$ を通じて間接フィードバックとして作用する。

3.2 周波数応答に基づく ψ の設計

式 (15) および式 (16) で示した位相の補正するため

の定数 ψ を近似的に求める. 式 (19) の制御入力を与えた場合に, \bar{x} と $\dot{\bar{x}}$ が時間微分の関係で与えられることを考慮して, \bar{x} を入力, 台車変位 x を出力と考えると状態方程式と出力方程式は次のように表される.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k})x + \mathbf{B}\mathbf{k}\bar{x} \\ c &= \mathbf{C}x \\ \mathbf{k} &= [k_1 \ k_2], \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \dot{\bar{x}} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

この入出力関係を伝達関数を用いて表すと次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} X &= (G_1(s) + sG_2(s))\bar{X} \\ [G_1(s) \ G_2(s)] &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{k})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに, X, \bar{X} はそれぞれ x, \bar{x} をラプラス変換したものである. 入力 $\bar{x}, \dot{\bar{x}}$ は微分関係を維持したまま式 (15) および式 (16) で与えるが, ここでは近似的に一定角速度 ω の三角関数で与えられたと仮定すると, 周波数応答の考えに従って入出力間の位相遅れを求めることができる. 制振制御時の振り子の振動数は固有振動数にほぼ等しいと仮定し, ψ を次式から求める.

$$\begin{aligned} \psi &= -\angle(G_1(j\omega_n) + j\omega_n G_2(j\omega_n)) \\ &= -\tan^{-1} \left(\frac{\Im[G_1(j\omega_n)] + \omega_n \Re[G_2(j\omega_n)]}{\Re[G_1(j\omega_n)] - \omega_n \Im[G_2(j\omega_n)]} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

ここに, $\Re[z]$ は z の実部を表し, $\Im[z]$ は z の虚部を表す. 以上の方法により, 近似的ではあるが目標値に対する台車の位相遅れを補正することができる. また, 本近似設計手法の有効性については, 著者らのグループによる他の研究成果^[7]で既に検証しているため, ここでは省略する.

3.3 楕円関数の母数に基づく台車運動の調整

上述の手法で制御を行った場合, 振り子の振動が十分小さくなったときに不具合が発生する. それは, 式 (14) で求められる $\sin \varphi, \cos \varphi$ の分母と分子が共にゼロに近くなるため, 台車の目標運動が不連続的となり, 結果としてチャタリングのような挙動となることである. これを防ぐために, 式 (15) および式 (16) の台車の目標運動の係数 a を次のように与える.

$$a = a_0 k \quad (23)$$

ここに, k は楕円関数の母数であり, 式 (13) より求められる. これによって, 仮に台車の目標値を $\bar{x} = a \cos \varphi$ で与えた場合には,

$$\bar{x} = a_0 k \cos \varphi = \frac{a_0}{2\omega_n} \dot{\theta} \quad (24)$$

となり, $\theta = \dot{\theta} = 0$ となるとき, 台車の目標運動も自然と小さくなる. また, そのときの台車の仕事率 P を式 (8) と同様求めると,

$$P = -\frac{a_0 m l \omega_n}{2} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \quad (25)$$

となる. これは, 振り子の角速度が最大であり, かつ, 台車運動によって生じる慣性力が振り子の回転運動に最も影響を与える最下点で多くの仕事をするを表しており, さらに, エネルギーが振り子の角速度の二乗に比例することから, 振り子の力学的エネルギーに応じて仕事率が変化することを示しており, 本制御手法が力学的な観点からみて妥当性の高い手法であることがわかる.

3.4 数値シミュレーションによる検証

数値シミュレーションによる検証を行った結果について述べる. まず, 制御モデルの系パラメータを表1に示す. 制御系設計パラメータについては, 極を $(-10, -8)$ とし, 式 (22) の計算より $\psi = 2.265 \text{ rad}$ とした. 初期角度を $\theta = 5\pi/6 \text{ rad}$ として数値シミュレーションを行った. $a_0 = 0.1$ とした場合の結果を図3に, $a_0 = 0.2$ とした場合の結果を図4に示す.

2つの結果ともに, 振り子の振れに対してある一定の位相差を保ちながら同期して台車が動いており, 各変位の初期値が大きく, 強い非線形特性を有しているにも関わらず, 振り子の振動を抑える制御が有効に働いていることがわかる. また, 振り子の振動を抑えることと台車の位置制御が同時に実現できており, その際の台車の往復運動の変位も小さく抑えられている. 一番下に示した楕円関数の母数 k は振り子の力学的エネルギーに相当し, $\theta = \pi/2$ 付近では振り子に負の仕事ができないため減少量が小さいものの, それ以外の状態では時間の経過と共に減少している. 式 (25) で示した振り子の仕事率はエネルギーに比例するものであるため, k の時間変化は指数関数的なものとなっている.

$a_0 = 0.1$ と $a_0 = 0.2$ の場合を比較すると, 後者のほうが収束時間が明らかに速いことから, a_0 の設定値によって振動の収束性能を変化させることができることがわかる. これは, a_0 が振り子の収束速度と台車変位の大きさというトレードオフの関係を設定するパラメータであることを表している.

以上より, 本制御手法によって振り子の振動を制御可能であると同時に, その挙動や制御パラメータの設計手法が力学的観点から妥当であることが示された.

Table 1 Values of system parameters

m	0.0499	kg
l	0.20	m
J	6.53×10^{-4}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
c	2.36×10^{-4}	Nms/rad
ξ	6.0	
ζ	3.5	

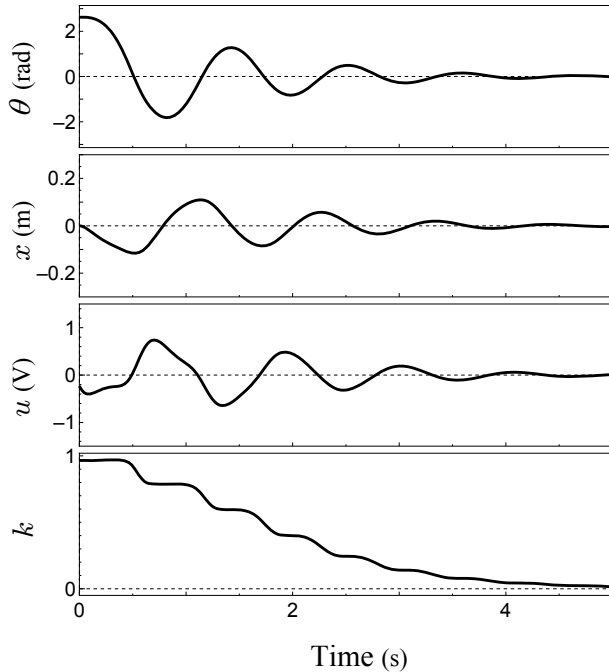


Fig. 3 Simulation result ($a_0 = 0.1$)

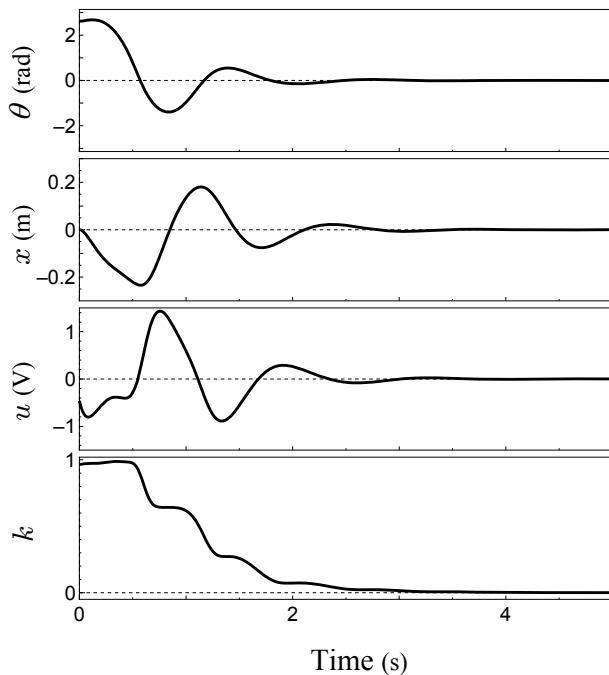


Fig. 4 Simulation result ($a_0 = 0.2$)

4. 結 言

台車駆動型振り子モデルに対し、楕円関数に基づく往復運動を台車に与えることで振り子の振動を制御する手法を提案した。得られた結論は次の通りである。

- ・ 振り子を直接の制御対象とせず、台車のみに対して制御系設計を行い、振り子の振動制御は台車運動の目標値という間接制御として与えた。これによって、台車の位置制御と振り子の振動制御という2つの制御を同時に無理なく実現した。
- ・ 台車の位置制御と振り子の振動制御の重みづけについては、台車の往復運動のパラメータ a_0 のみによって調整可能である。
- ・ 台車の往復運動の大きさを楕円関数の母数 k に合わせて変化させることで振り子のエネルギー状態に応じて振動を減少させることが可能とした。

今後は、実験機において本制御法の有効性の確認を行うとともに、本制御法を行った際の機械的負荷の軽減について検討したいと考えている。

文 献

- [1] 坂和 愛幸, 天井走行クレーンのモデリングと最適制御, 計測自動制御学会論文集, Vol.34-8, pp.962-967, 1998.
- [2] 小谷 齊之・大内 茂人・穴吹 雅敏・劉 康志, H_2 コントローラの低次元化設計—走行クレーンの振れ止め制御への適用—, 計測自動制御学会論文集, Vol.41-6, pp.509-517, 2005.
- [3] 伊藤 洋・鈴木 浩平, 天井クレーンの荷揺れ抑制手法に関する研究 (連成振動を考慮し荷揺れを抑制した搬送手法), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.72-720, pp.2406-2412, 2006.
- [4] 三好 孝典・寺嶋 一彦・森田 正則, 時変振動機構に対する制振フィードフォワード制御入力の導出とクレーンへの応用, 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.64-624, pp.2859-2866, 1998.
- [5] K. J. Åström and K. Furuta, Swing up a pendulum by energy control, *Automatica*, Vol.36-2, pp.287-295, 2000.
- [6] 戸田, 楕円関数入門, 日本評論社, 2001.
- [7] 園部 元康・松崎 健一郎・近藤 孝広・宗和 伸行, モード解析に基づく部分空間制御法に関する研究 (第2報, 非線形共振を利用した並列二重倒立振り子の振り上げ制御), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.74-745, pp.2198-2205, 2008.