finite topology の basis について

久保 康幸 ＊

basis for finite topology

Yasuyuki Kubo ＊

Abstract

In this paper, I have proved Proposition 2.1, Lemma 2.2 and Lemma 2.3 in Ernest Michael's "Topologies on spaces of subsets"(1951).

これは、「Topologies on spaces of subsets」by Ernest Michael (1951) を読んでいるときのメモである。対比のため、元の論文に番号のついた定義や命題は、それを括弧内に記す。

0.1 Proposition 2.1. について

確認. (位相生成の手順)
X の open collection から位相を生成 (generate) するのは、次の手順によればよい。
$\mathcal{L}$ を X の open collection とする。
$\mathcal{L}^* = \{\bigcap \mathcal{F}; \mathcal{F} \subset \mathcal{L}, \mathcal{F}$ は有限個 $\}$ として、
$\mathfrak{T}(\mathcal{L}^*) = \{\bigcup \mathcal{U}; \mathcal{U} \subset \mathcal{L}^*\}$ とする。
このとき、$\mathfrak{T}(\mathcal{L}^*)$ は、位相の性質を満たす。もし必要なら、空集合 $\emptyset$ と全体 X を加えておけばよい。
このように位相を生成したとき、$\mathcal{L}^*$ を base (basis, open base, 開基), $\mathcal{L}$ を subbase (subbasis, 部分開基) という。
注意
$\bigcup \mathcal{L} \supset X$ なら、$\mathfrak{T}(\mathcal{L}^*)$ に後から X を加えなくても、既に入っている。また、その方が自然な位相が生成されるので、通常は、$\bigcup \mathcal{L} \supset X$ を満たす open collection $\mathcal{L}$ から X への位相を生成する。

X に位相 T を導入し、位相空間 (X, T) を考える。
記号 (Notation 1.4.)
$\mathcal{A}(X) = \{E \subset X; E \neq \emptyset\}$,
$2^X = \{E \subset X\ ; E$ は closed, $E \neq \emptyset\}$
$\quad = \{E \in \mathcal{A}(X)\ ; E$ は closed $\} \subset \mathcal{A}(X)$
記号 (Notation 1.5.)
X の subset の集まり $\{U_i\}_{i \in I}$ に対して、

$$\langle U_i \rangle_{i \in I} = \left\{ E \in 2^X ;\ \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \\ E \cap U_i \neq \emptyset \text{ (for all } i \in I) \end{array} \right\}$$

と書く。
もし $I = \{1, ..., n\}$ なら、$\langle U_i \rangle_{i \in I}$ を $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ と表す。

Def. (finite topology, Definition 1.7.)
位相空間 (X, T) について、X の open subsets $U_1, ..., U_n$ で作る $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ を集めた open collection によって生成された位相を 2^X 上の finite topology 2^T とする。

位相生成の手順から分かるように、$\langle U_1, ..., U_n \rangle$ を集めた open collection は、2^X の finite topology 2^T に対し、sub base であるが、それ以上に、 base となっている。

命題 1. (Proposition 2.1.)
$U_1, ..., U_n$: open in X について、$\langle U_1, ..., U_n \rangle$ を集めた open collection は、2^X の finite topology 2^T に対して、base となっている。
証明の方針
$\mathcal{B}$ が空間 2^X の base であることを示すには、
(a) $2^X \in \mathcal{B}$
(b) $\forall U, V \in \mathcal{B} (U \cap V \in \mathcal{B})$
を示せばよい。
(b) を示すには、$\mathfrak{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle, \mathfrak{V} = \langle V_1, ..., V_m \rangle$ とするとき、$\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ が $\mathfrak{W} = \langle W_1, ..., W_l \rangle$ の形で表される事を示せばよい。
証明
(a) $2^X = \langle X \rangle$ である:
定義より $\langle X \rangle = \{E \in 2^X; E \subset X, E \cap X \neq \emptyset\}$ であり、$\langle X \rangle \subset 2^X$ となる。
一方、$2^X = \{E \subset X; E : \text{closed}, E \neq \emptyset\}$ より、$E \in 2^X$ なら $E \subset X$ なので、$E \cap X = E \neq \emptyset$ となるから、$E \in X$ 、つまり $2^X \subset \langle X \rangle$
従って、$2^X = \langle X \rangle$ である。
(b) $\mathfrak{U} = \langle U_1, ..., U_n \rangle, \mathfrak{V} = \langle V_1, ..., V_m \rangle$ とする。($\in \mathcal{B}$)
$U = U_1 \cup ... \cup U_n, V = V_1 \cup ... \cup V_m$ とするとき、

＊ 総合教育科

平成 21 年 9 月 3 日受理

$\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}=\langle U_1\cap V,...,U_n\cap V,V_1\cap U,...,U_m\cap U\rangle\cdots(*)$
(よって、$\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}\in\mathcal{B}$)
(証明終)
$(*)$ の証明
$U=U_1\cup...\cup U_n,\ V=V_1\cup...\cup V_m$ とするとき、
定義より、

$$\mathfrak{U}=\langle U_1,...,U_n\rangle$$
$$=\{E\in 2^X;E\subset U,E\cap U_i\neq\emptyset(i=1,...,n)\},$$
$$\mathfrak{V}=\langle V_1,...,V_m\rangle$$
$$=\{E\in 2^X;E\subset V,E\cap V_j\neq\emptyset(j=1,...,m)\}$$

このとき、$\mathfrak{W}=\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$ とすると、

$$\mathfrak{W}=\left\{E\in 2^X;\ \begin{array}{l}E\subset U,E\cap U_i\neq\emptyset\ (i=1,...,n)\\ E\subset V,E\cap V_j\neq\emptyset\ (j=1,...,m)\end{array}\right\}$$
$$=\left\{E\in 2^X;\ \begin{array}{c}E\subset U\cap V,\\ E\cap U_i\neq\emptyset\ (i=1,...,n)\\ E\cap V_j\neq\emptyset\ (j=1,...,m)\end{array}\right\}$$

で、$E\in\mathfrak{W}$ なら $E\subset U\cap V$ より $E\cap(U\cap V)=E$ なので、$E\cap U_i=E\cap(U\cap V)\cap U_i=E\cap(U\cap V\cap U_i), E\cap V_j=E\cap(U\cap V)\cap V_j=E\cap(U\cap V\cap V_j)$ となる。
また、今の等式と集合算の分配法則より

$$\bigcup\{U\cap V\cap U_i;i=1,...,n\}=U\cap V,$$
$$\bigcup\{U\cap V\cap V_j;j=1,...,n\}=U\cap V$$

となるので、

$$\bigcup\{U\cap V\cap U_i;i=1,...,n\}\cup\bigcup\{U\cap V\cap V_j;j=1,...,n\}=U\cap V$$ である。

よって、$\mathfrak{W}=\langle U_1\cap V,...,U_n\cap V,V_1\cap U,...,U_m\cap U\rangle$
($(*)$ の証明終)

0.2 Lemma 2.2. について

Def.(acceptable, Definition 1.6a.)
2^X 上の topology が acceptable(受入可能) とは、$\{E\in 2^X;E\subset A\}$ が、すべての closed $A\subset X$ について closed かつ、すべての open $A\subset X$ について open となることとする。

finite topology 2^T は、2^X 上の coarest(最も目が粗い) acceptable な位相である。

注1．finite topology 2^T が、2^X 上の acceptable な位相であることは、以下の命題2-1で示す。

注2．X の部分集合の族 $\mathcal{L}$ に対して、初めに確認した手順で導入した位相は、$\mathcal{L}$ の要素をすべて open とする位相のうち、最も弱い位相である。しかし、この事からの類推でなく、以下の命題2-2で示す。

命題2-1.
finite topology 2^T は、2^X 上の acceptable な位相である、すなわち、
(a) すべての A : open in X について、
$\{E\in 2^X;E\subset A\}$: open in $(2^X,2^T)$ 、かつ、
(b) すべての A : closed in X について、
$\{E\in 2^X;E\subset A\}$: closed in $(2^X,2^T)$
である。

証明
(a) A : open in X とする。finite topology の定義より $\langle A\rangle$: open in $(2^X,2^T)$ である。
$\{E\in 2^X;E\subset A\}=\{E\in 2^X;E\subset A,E\cap A\neq\emptyset\}=\langle A\rangle$ なので、 $\{E\in 2^X;E\subset A\}$ が open in $(2^X,2^T)$ となる。
(b) A : closed in X とする。$\{E\in 2^X;E\subset A\}$: closed in $(2^X,2^T)$ となる事を示すには、補集合を取って $\{E\in 2^X;E\not\subset A\}$: open in $(2^X,2^T)$ を示せばよい。
$E\not\subset A$ は、$E\cap(X\setminus A)\neq\emptyset$ と同値である。
ここで、$B=X\setminus A$ とする。B: open in X であるから $\langle X,B\rangle$: open in $(2^X,2^T)$ である。
一方、$\{E\in 2^X;E\not\subset A\}$

$$=\{E\in 2^X;E\cap B\neq\emptyset\}$$
$$=\{E\in 2^X;E\subset X,E\cap X\neq\emptyset,E\cap B\neq\emptyset\}$$
$$=\{E\in 2^X;E\subset X\cup B,E\cap X\neq\emptyset,E\cap B\neq\emptyset\}$$

$=\langle X,B\rangle$ であるから、
$\{E\in 2^X;E\not\subset A\}$ が open in $(2^X,2^T)$ となる。
(注) 条件 (b) は、次の条件 (b)' と同値である。
(b)' すべての B : open in X について、
$\{E\in 2^X;E\cap B\neq\emptyset\}$: open in $(2^X,2^T)$
(証明終)

命題2-2.
finite topology 2^T は、2^X 上の acceptable な位相の中で最も粗い位相である、すなわち、$\mathcal{O}$ を acceptable な位相とするとき、2^T で open な集合は、$\mathcal{O}$ でも open である。

証明の方針
2^T の開集合は、$\langle U_1,...,U_n\rangle$ (各 U_i: open) の形の集合の和で表されるから、$\langle U_1,...,U_n\rangle\in\mathcal{O}$ を示せばよい。

証明の準備
$U=\bigcup_{i\in I}U_i$ とする。

補題2-2-1.
$\langle U_1,...,U_n\rangle=\langle U,U_1\rangle\cap...\cap\langle U,U_n\rangle$

証明
すべての i について、定義より $\langle U, U_i\rangle = \{E \in 2^X; E \subset U \cup U_i, E \cap U \neq \emptyset, E \cap U_i \neq \emptyset\}$、
$U_i \subset U$ より $U \cup U_i = U$ であるから
$\langle U, U_i\rangle = \{E \in 2^X; E \subset U, E \cap U \neq \emptyset, E \cap U_i \neq \emptyset\}$、
$E \in 2^X$ より $E \neq \emptyset$ であるから “$E \subset U, E \cap U \neq \emptyset$” は “$E \subset U$” と同値であり
$\langle U, U_i\rangle = \{E \in 2^X; E \subset U, E \cap U_i \neq \emptyset\}$ となる。
したがって、
$\langle U, U_1\rangle \cap ... \cap \langle U, U_n\rangle$
$= \{E \in 2^X; E \subset U, E \cap U_i \neq \emptyset \text{ (for all } i)\}$
$= \langle U_1, ..., U_n\rangle$
(2-2-1 証明終)

補題2-2-2.
$\mathcal{O}$ を acceptable な topology とするとき、
$\langle U, U_i\rangle$: open in $\mathcal{O}$ (for all i)
証明
すべての i について、補題 2-2-1 の証明にあるように
$\langle U, U_i\rangle = \{E \in 2^X; E \subset U, E \cap U_i \neq \emptyset\}$
$= \{E \in 2^X; E \subset U\} \cap \{E \in 2^X; E \cap U_i \neq \emptyset\}$ である。
ここで、acceptable の条件 (a) より
$\{E \in 2^X; E \subset U\}$: open in $\mathcal{O}$、
条件 (b)' より $\{E \in 2^X; E \cap U_i \neq \emptyset\}$: open in $\mathcal{O}$、
よって $\langle U, U_i\rangle$: open in $\mathcal{O}$
(2-2-2 証明終)

証明 (命題 2-2)
$\mathcal{O}$ を acceptable な topology とする。
補題 2-2-1 と 2-2-2 より、$\langle U_1, ..., U_n\rangle$ は、$\mathcal{O}$ の有限個の開集合の共通部分 $\langle U, U_1\rangle \cap ... \cap \langle U, U_n\rangle$ として表されるから、$\mathcal{O}$ の開集合となる。よって、2^T で open な集合は、$\mathcal{O}$ でも open である。
(証明終)

命題2-1と同様の、次の命題を証明する。

命題2-3. (Lemma 2.2.)
位相空間 (X, T) について、
(c) すべての A : closed in X について
$\{E \in 2^X; E \subset A\}$: closed in$(2^X, 2^T)$ 、かつ、
(d) すべての A : closed in X について
$\{E \in 2^X; E \cap A \neq \emptyset\}$: closed in$(2^X, 2^T)$ である。

証明
条件 (c) は、条件 (b) と同じであるから、条件 (d) を示せばよい。
A : closed in X のとき、補集合 $X \setminus A$: open in X で、$\{E \in 2^X; E \cap A \neq \emptyset\}$ の補集合は、
$\{E \in 2^X; E \cap A = \emptyset\}$
$= \{E \in 2^X; E \subset (X \setminus A)\}$
$= \{E \in 2^X; E \subset (X \setminus A), E \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$
$= \langle X \setminus A\rangle$: open in $(2^X, 2^T)$
ゆえに、$\{E \in 2^X; E \cap A \neq \emptyset\}$: closed in $(2^X, 2^T)$
(証明終)

0.3 Lemma 2.3. について

Lemma 2.3 には、3つの命題がある。ここでは、それらを命題 3-1, 3-2, 3-3 に分けて考える。

命題3-1. (Lemma 2.3.1.)
$(\langle U_1, ..., U_n\rangle \subset \langle V_1, ..., V_m\rangle)$
$\rightleftharpoons$
$(\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ かつ $\forall V_j\ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j)$
証明
$\leftharpoondown$ について証明1：
対偶を考える。つまり前を否定して、後を否定する。
$\langle U_1, ..., U_n\rangle \not\subset \langle V_1, ..., V_m\rangle$ かつ $\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ と仮定する。$E \in \langle U_1, ..., U_n\rangle \setminus \langle V_1, ..., V_m\rangle$ を取れば、$E \notin \langle V_1, ..., V_m\rangle$ より $\exists j$ s.t. $E \cap V_j = \emptyset$ この j に対して、すべての U_i が $U_i \cap E \neq \emptyset$ であり、$U_i \subset V_j$ となり得ない。
（注）この証明は、後を仮定して、前の否定から矛盾を得ることにより、前を導くと考えても良い。
$\leftharpoondown$ について証明2：
後を仮定して、前を示す。$E \in \langle U_1, ..., U_n\rangle$ のとき、$E \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ より、$E \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ となる。また、$\forall V_j\ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j$ このとき、$E \cap U_i \neq \emptyset$ より、$E \cap V_j \supset E \cap U_i \neq \emptyset$ よって、$E \in \langle V_1, ..., V_m\rangle$ 従って、$(\langle U_1, ..., U_n\rangle \subset \langle V_1, ..., V_m\rangle)$
$\rightharpoonup$ について前半：
$\langle U_1, ..., U_n\rangle \subset \langle V_1, ..., V_m\rangle$ を仮定して、$\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ を示す。$E \in \langle U_1, ..., U_n\rangle$ のとき、後を否定して、$F = \bigcup_{i=1}^n U_i \setminus \bigcup_{i=1}^m V_i \neq \emptyset$ とする。$E, F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ であるから、 $E \cup F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ である。また、全ての i について $(E \cup F) \cap U_i \supset E \cap U_i \neq \emptyset$ であるから、$E \cup F \in \langle U_1, ..., U_n\rangle$ であり、仮定より

$E \cup F \in \langle V_1, ..., V_m \rangle$ となるから、$E \cup F \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ となり、$F \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$ である。F の作り方から、これは矛盾である。

$\rightharpoonup$ について後半：

前半と同様に $\langle U_1, ..., U_n \rangle \subset \langle V_1, ..., V_m \rangle$ を仮定する。今度は、$\forall V_j\ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j$ を示す。これを否定して、$\exists V_k$ s.t. $\forall U_i \not\subset V_k$ とする。この V_k に対して、$F = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \setminus V_k)$ とする。このとき、$F = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \setminus V_k) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ かつ、すべての i について、$F \cap U_i \supset (U_i \setminus V_k) \cap U_i = U_i \setminus V_k \neq \emptyset$ であるから、$F \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$ となる。仮定より、$F \in \langle V_1, ..., V_m \rangle$ であるから、$F \cap V_k \neq \emptyset$ となる。F の作り方から、これは矛盾である。

(証明終)

(注１) ” $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ ” と ” $\forall V_j\ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j$ ”は、別物である。

(注２) この命題より、$n \leqq m$ のとき $\langle V_1, ..., V_n \rangle \subset \langle V_1, ..., V_m \rangle$ である。

命題３-２. (Lemma 2.3.2.)

2^X 上の finite topology の中で、$\mathrm{Cl}(\langle U_1, ..., U_n \rangle) = \langle \overline{U_1}, ..., \overline{U_n} \rangle$

(注) ” $\mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle) = \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ ” を示せばよい。

補題３-２-１.

$\langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ が、closed in 2^X である。

証明

$F \notin \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ のとき、$F \not\subset (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$ or $F \cap \overline{U_1} = \emptyset$ or $F \cap \overline{U_2} = \emptyset$ である。

(1) $F \not\subset (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$ のとき、$F \cap (X \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})) \neq \emptyset$ である。$V = X \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$ とすると、$F \cap V \neq \emptyset$より、$F \in \langle V, X \rangle$ であり、$\langle V, X \rangle \cap \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle \neq \emptyset$ となる。

(2) $F \cap \overline{U_1} = \emptyset$ のとき、$F \subset (X \setminus \overline{U_1})$ である。$V = X \setminus \overline{U_1}$ とすると、$F \subset V$ より $F \in \langle V \rangle$ であり、$\langle V \rangle \cap \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle \neq \emptyset$ となる。

(3) $F \cap \overline{U_2} = \emptyset$ のとき、$V = X \setminus \overline{U_2}$ とすると、V は X の open set で、(2) と同様に、$F \in \langle V \rangle$ かつ、$\langle V \rangle \cap \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle \neq \emptyset$ となる。

(4) 上の 3 つの各々の場合に、V は X の open set なので、$\langle V, X \rangle$ や $\langle V \rangle$ は、$\langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ と交わらない open set であり、$\langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ が、closed in 2^X であると示された。

(証明終)

補題３-２-２.

$\mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle) \supset \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ である。

証明

$\forall F \in 2^X \left(F \in \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle \to F \in \mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle)\right)$ を示せばよいから、$F \in \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ かつ $F \notin \mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle)$ な $F \in 2^X$ があると仮定して矛盾を導くとことにする。$F \in \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ より $F \cap \overline{U_i} \neq \emptyset (i = 1, 2)$ であるから、点 $x_i \in F \cap \overline{U_i} (i = 1, 2)$ を取る。$x_i \in F (i = 1, 2)$ である。一方、$F \notin \mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle)$ より $\exists W$:open in 2^X s.t. $F \in W$ かつ $W \cap \langle U_1, U_2 \rangle = \emptyset$となる。この W は、$W = \langle W_1, ..., W_m \rangle$ と考えてよい。そのとき、$F \subset W_1 \cup ... W_m$ より $\exists W_{j(i)}$ s.t. $W_{j(i)} \ni x_i (i = 1, 2)$ となる。この２つの $W_{j(i)}$ について、$x_i \in W_{j(i)} \cap \overline{U_i} \neq \emptyset$ であり、$W_{j(i)}$:open in X なので、$W_{j(i)} \cap U_i \neq \emptyset (i = 1, 2)$ となる。そこで、$y_i \in W_{j(i)} \cap U_i (i = 1, 2)$ となる 2 点を取って $A = \{y_1, y_2\}$ とする。このとき、$A \in \langle U_1, U_2 \rangle \cap \langle W_{j(1)}, W_{j(2)} \rangle$ であるが、命題 3-1 の注 2 より $\langle W_{j(1)}, W_{j(2)} \rangle \subset \langle W_1, ..., W_m \rangle = W$ であるから、$A \in \langle U_1, U_2 \rangle \cap \langle W_1, ..., W_m \rangle$ となって、$W \cap \langle U_1, U_2 \rangle = \emptyset$ に矛盾する。

(証明終)

証明 (命題 3-2)

(1) $\langle U_1, U_2 \rangle \subset \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ であり、補題 3-2-1 より、$\langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ が、closed in 2^X であるから、$\mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle) \subset \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ となる。

(2) 補題 3-2-2 より、$\mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle) \supset \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ である。

(3) (1),(2) より $\mathrm{Cl}(\langle U_1, U_2 \rangle) = \langle \overline{U_1}, \overline{U_2} \rangle$ となる。

(証明終)

Def.(基本近傍系)

空間 X とその点 x について、x の近傍の集合 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が basis for the neighborhoods of x (x の基本近傍系) であるとは、

$\forall U$:open in $X (x \in U \to \exists \alpha \in A$ s.t. $U_\alpha \subset U)$ となることとする。

命題３-３. (Lemma 2.3.3.)

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が、basis for the neighborhoods of x in X ならば、

$\{\langle U_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$ が、basis for the neighborhoods of $\{x\}$ in 2^X となる。

証明の方針
$\forall W$:open in 2^X
$(\{x\} \in W \to \exists \alpha \in A \text{ s.t. } \langle U_\alpha \rangle \subset W)$
を示せばよいから、命題 1(Prop.2.1) より $W = \langle W_1, ..., W_m \rangle$ に対して、$\langle U_\alpha \rangle \subset W$ をみたす $\alpha \in A$ を見つければよい。

証明
$\{x\} \in W = \langle W_1, ..., W_m \rangle$ とする。$\{x\} \subset W_1 \cup ... \cup W_m$ かつ $\forall j = 1, ..., m\,(\{x\} \cap W_j \neq \emptyset)$ となる。このとき、$\forall j = 1, ..., m\,(x \in W_j)$ であるから、ひとつの W_j を選んで、それに対し、$U_\alpha \subset W_j$ となる $\alpha \in A$ を取る。このとき、$\langle U_\alpha \rangle \subset \langle W_1, ..., W_m \rangle = W$ である。
(証明終)

参考文献

Michael, Ernest "Topologies on spaces of subsets." Trans. Amer. Math. Soc. 71, (1951) pp.152–182.

森田紀一"位相空間論 (岩波全書 331)" 岩波書店 (1981).

加藤十吉"集合と位相 (新数学講座３)" 朝倉書店 (1982).

鎌田正良"集合と位相 (現代数学ゼミナール 8)" 近代科学社 (1989).