

# 6面ヘキサフレクサゴンの変則折り

岩本 豊\*

## Irregular Flexes of Hexahexaflexagons

Yutaka Iwamoto\*

### Abstract

Hexaflexagons are hexagonal shaped paper polygons, folded from straight or crooked strips of paper. They were invented in 1939 by Arthur H. Stone, and have been investigated thoroughly for normal flexes. For each natural number  $n$  greater than two, it is known that there are constructions of models of hexaflexagon with  $n$  faces. If a model of hexaflexagon has six faces, then it is called a (model of) hexahexaflexagon.

In this paper, we give a detailed description of irregular flexes (they are called V-flexes in T. Bruce McLean's paper<sup>2)</sup>) of the straight model of hexahexaflexagon and show its interesting properties. In particular, we show how to bring three colors in each faces of it. The practical content of the extension course that deals with the irregular flexes of hexahexaflexagon is also reported.

**Keywords :** hexaflexagon, hexahexaflexagon, topology, irregular flex, V-flex, Möbius strip, paper craft, Origami, mathematical education, mathematical puzzle

**キーワード :** ヘキサフレクサゴン, 折り紙六角形, トポロジー, 変則折り, メビウスの帯, ペーパークラフト, 折り紙, 数学教育, 数理パズル

### 1. はじめに

ヘキサフレクサゴン (hexaflexagon) とは正六角形の形をしたペーパークラフトで, イギリスの数学者 Arthur H. Stone が 1939 年に考案したものであり, 日本では「折り紙六角形」とか「たたみかえ折り紙」などと呼ばれている<sup>1)</sup>。以来, 現在に至るまで 70 年に亘って, 数学者, 教育者, パズル愛好家達の手によって研究が続けられている。

本稿の前半では, 基本となる 3 面折りのヘキサフレクサゴンではなく, 6 種類の面を持つ 6 面ヘキサフレクサゴン (hexahexaflexagon) を扱う。最初に 6 面ヘキサフレクサゴンの標準的な構成方法と折り方および推移図について述べた後, 変則折りを紹介する。尚, ここでいう変則折りとは, T. Bruce McLean の論文<sup>2)</sup> で V-flex と呼ばれているものである。理論的な側面は彼の論文が詳しいのでそちらに譲り, ここでは実用面を重視して, 1 面に 3 色を出す方法と, 逆操作について詳しく解説する。後半では, 変則折りの有用性を示す例として, これらを用いた公開講座の実践例を報告する。

### 2. 6面ヘキサフレクサゴン・モデル

ここでは以降で用いるヘキサフレクサゴン・モデルの構成法とその標準的な折り方について図1を用いながら解説する。

まず 19 個の正三角形からなる細長い帯を用意する。この図では大文字のアルファベット (A~F) で各面 (色) を, それに続く数字で正六角形の一面を構成するヘキサフレクサゴンにおける最小パーツ (正三角形) を区別した。番号は, 完成したヘキサフレクサゴンの各面において順に数字が並ぶよう配慮している。面と色については, 原則として 1 面に 1 色しか出ない場合は色を含めて面という表現を用い, 1 面に複数の色が出る場合には色を優先させて表現する。

一般的には, 3 以上の全ての自然数  $n$  に対して,  $n$  面ヘキサフレクサゴン・モデルが存在することが知られている<sup>1) 3)</sup>。ここで用いたヘキサフレクサゴン・モデルはストレート・モデル (straight model) と呼ばれているものであり<sup>4)</sup>, まっすぐな帯からヘキサフレクサゴンが作られる最も簡明で美しいモデルの 1 つである。

2. 1 ヘキサフレクサゴンの構成法

ここでは6面ヘキサフレクサゴンの構成法を述べる。基本となる3面折りについては戸田盛和<sup>5)</sup> または西山豊<sup>1)</sup> の文献が詳しいのでそちらを参照して欲しい。

図1の丸印●がついている面を表にして、各同色(同一のアルファベットを持つ)隣接面を区切る辺を順次谷折りする。そうして出来た11個の正三角形からなる帯を図の矢印で示した順に破線部分を谷、山、山の順に折ることで最終形まで変形する。ただし、2回目の山折りでは、B-3がD-4に重なるように三角形を持ち上げながら変形していることに注意する。最後の図における破線部を谷折りすると同時に星印★の面と丸印●の面をのり付けすることで6面折りヘキサフレクサゴンが完成する。

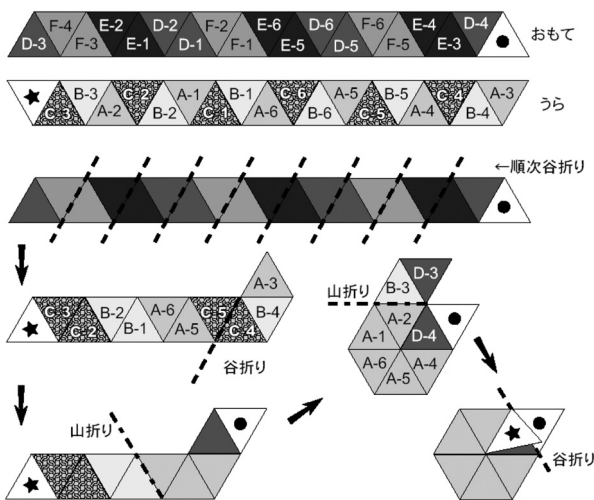


図1 ストレート・モデル

2. 2 ヘキサフレクサゴンの標準折り

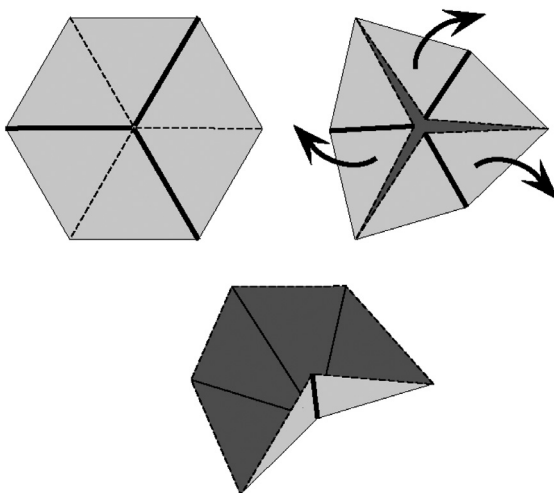


図2 標準折り

標準的な折り方とは、図1によって完成したヘキサフレクサゴンの各面内部にある線分を1つ飛ばしに谷折りと山折りにし、中央を開き、新たな面を出す操作のことである。

図2を用いて具体的に述べると、太線部分を谷折り、破線部分を山折りし、稜線となった破線部分を開くことで新たな面が表れる。

もし、中央が開かない場合は、最初の山折り・谷折りを逆にすればよい。

2. 3 面の推移図

図1のモデルによって作られたヘキサフレクサゴンの面は以下の図3で示したように推移する。

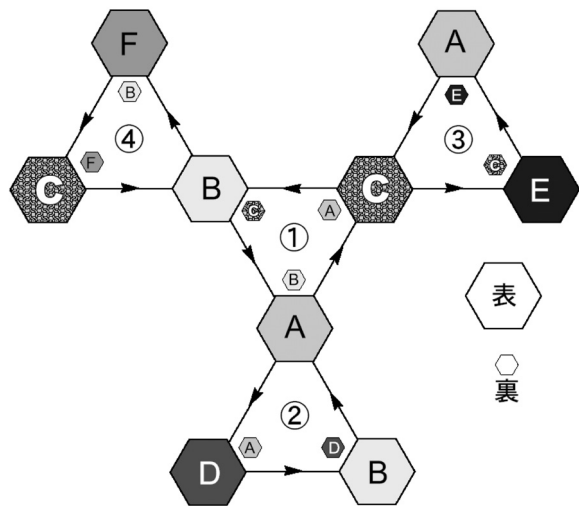


図3 推移図

この図では大きな正六角形で表面を、小さな正六角形で裏面をそれぞれ表した。また、矢印は表面を固定して標準折りを行ったときの移行方向を示している。

一般的には表面だけを見た推移図<sup>1) 3) 4)</sup> が掲載されているが、例えば、Aが出てくる場面は表面だけを考えれば2箇所(A-B, A-E)、裏面にも2箇所(C-A, D-A)の合計4箇所存在し、それぞれの場合において表裏の組合せが異なる。また、実際に公開講座等で受講生が作った面がどのような状態にあるのかを知るためには表裏のペアで考えた方が正確で混乱しにくい。以上の理由で、ここでは裏面も含めた推移図にしている。

図で明らかのように、6面ヘキサフレクサゴンに存在する表裏のパターンは9通りである。6色から2色を選ぶ組合せは15通りだが、その内6通りが存在しない。これは中央A-B, C-A, B-Cかならなるサークル①から派生するサークル②, ③, ④において、残りのD, E, Fがそれぞれ独立して表れるため、D

~Fの3つから2つを取り出す組合せ(3通り)と、②~④が隣接している頂点に無い色の組合せ(D-C, E-B, F-Aの3通り)の合計6通りが存在しないということである。

### 3. ヘキサフレキサゴンの変則折り

標準折りは図3からも明らかなように、無限に続く(繰り返し)操作であるのに対し、ここで紹介する変則折りの回数は限られている。しかも、標準折りでは同じ操作を繰り返し行うことで元に戻る性質があるのに対し、変則折りした面を元に戻すためには幾つかの工夫が必要になる。これらは変則折りに負の印象を与えるかもしれない。しかし、変則折りを導入することではじめて各面が単色で構成される状況を打開することが出来るのである。この事実は、理論面より実用面で魅力的なものとなる(後半の公開講座の章を参照)。

この章では6面ヘキサフレキサゴンのストレート・モデルの変則折りを紹介し、1面に3色を出す方法までを具体的に解説する。

尚、ここでいう変則折りとは、T. Bruce McLeanの論文<sup>2)</sup>でV-flexと呼ばれているものである。筆者がこの論文の存在を知ったのは、次章で述べる公開講座を終えて1ヶ月が経った頃のことであった。本稿では筆者が公開講座に向けて考え、準備していた解説方法を採用している。そのため、彼の論文とは表現方法、解説の仕方等が異なっていることをお断りしておく。

#### 3. 1 変則折り (2色1面折り)

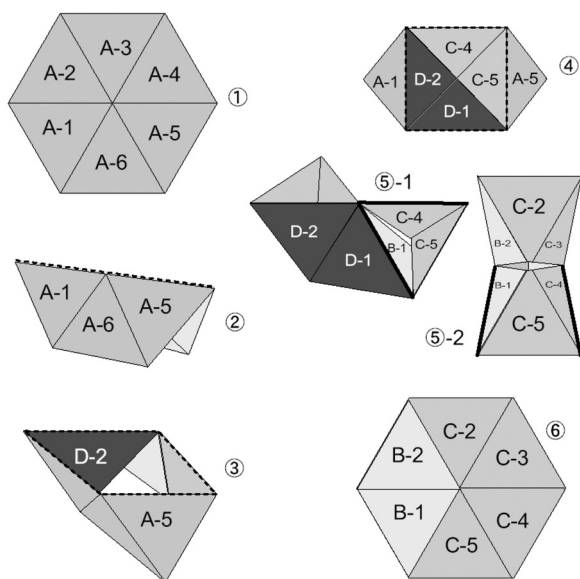


図4 (A-1, A-2) -送り

- ここでは図4を用いて変則折りの方法を解説する。
- ①Aが手前, Bが裏になった状態から解説する。特に裏の色が異なると出来上がりが別物になるので注意する。
  - ②A-1, A-2の隣接境界線を含む対角線を山折りする。
  - ③稜線となった破線部分を開く。
  - ④完全に開くと中央に正方形が出来る。この状態で裏側からD-1の面を上方へ完全に押し上げる。
  - ⑤図に示した2つの太線部分(⑤-1)を左右に押し広げる(⑤-2)。
  - ⑥完成(2色が1面に表れる)。

尚、図4では見やすくするためにCに対応する箇所のメッシュを外している。

以上の操作をここでは(A-1, A-2)-送りと呼ぶことにする。送りという言葉を使うのは、この場合A-1をヘキサフレキサゴンの内側へ送ったことになっているためである。

変則折りは図3①のサークル内にある面構成の状態では1つの面に対し6通り存在し、どの辺に対して操作を行っても1つの面に2色を出すことが出来る。また、図3②~④のサークル内にある面構成で送り操作は存在しないことに注意する。

以上が変則折りの具体的な方法である。図の数が多いために大変な操作のように思われるかもしれないが、少し練習すれば一瞬で変形出来るようになる。

#### 3. 2 逆操作と3色1面折り

図4⑥のように変形されたものを元に戻すにはどうすればよいだろうか。図4⑥~①へと逆向きに変形していけばよいではないか、というのは確かに1つの解法である。これを(C-1, C-2)関する戻し操作と呼ぶことにする。この戻し操作において、注意すべき箇所は図4⑤-2である。この形をきちんと理解しないと、意外と戻し操作は難しい。

一方、上に述べた送り操作だけを用いて元に戻すことも出来る。この操作についても簡単に説明しておこう。

送り操作だけで元に戻すためには、少しだけ工夫が必要となる。図4⑥を例にして話を進めると、この面を表にして操作するのではなく、一旦面を裏返し、送り操作を行う場所を1コマずらすのである。より具体的には、裏返した面に対し、(D-1, A-5)-送りを行えばよい(図5)。

上で図3①のサークル内にある面構成の状態では各面に対し6通りの送り操作が存在すると述べたが、図4⑥を裏返した状態では、(D-1, A-5), (A-4, A-5), (A-3, A-2)の3通りしか送り操作は存在しない。この内、逆操作となるのは(D-1, A-5)-送りである。

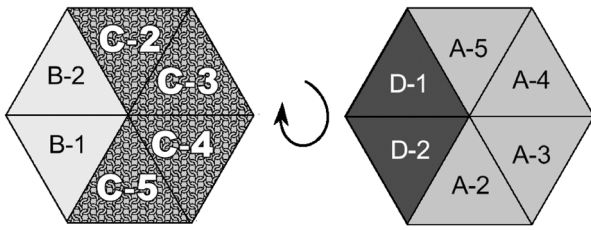


図5 裏返した状態

つまり図4⑥を元に戻す操作としては、(C-1, C-2)に関する戻し操作と、(D-1, A-5)-送りの2通りの方法が存在することが分かる。

では、残りの送り操作 (A-4, A-5), (A-3, A-2) ではどうなるかであるが、これらについては変則折りが正の順に繰り返され、1面に3色を出ることが出来る (図6)。また、1面に3色が出た状態からも標準折り出来ることに注意する。

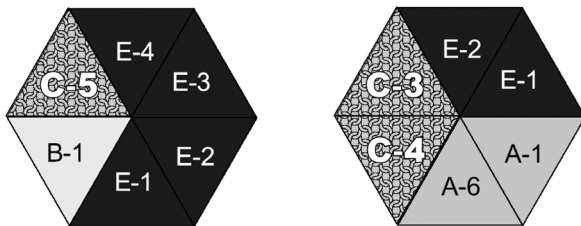


図6 1面3色

尚、図6の状態から元へ戻すステップでは、送り操作ではなく、(A-4, A-5), (A-3, A-2) それぞれに関する戻し操作でないと上手くいかないことに注意する。

#### 4. 公開講座の実践例

ここでは平成21年8月8日(土)に本校で実施した公開講座「メビウスからひろがる不思議な世界ー不思議なパズルたちー」について報告する。

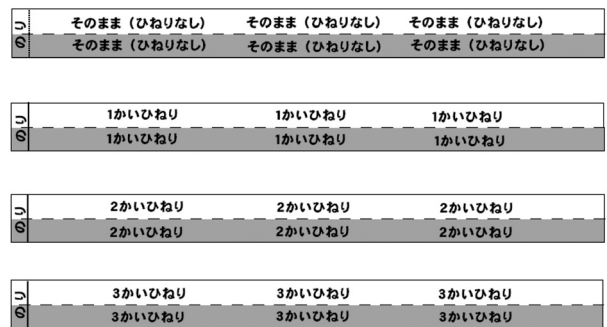
この講座は紙の工作を通して、数学(トポロジー)を絡めながら不思議な体験をしてもらおうと企画したものである。対象は小学生以上とし、親子での参加も歓迎とした。募集人数は20名としたが、昨年<sup>6)</sup>は3人しか参加者がいなかったため、今年度もその程度の参加人数であろうと予想していた。ところが、予想に反して最初の締め切り段階では21名の応募があった。そのため、急遽本校の山尾徳雄先生、非常勤の雙知延行先生、そして事務の白石千春さんにも講座を手伝ってもらおうこととなった。最終的な参加者は、当日町内に別の催し物があったこともあり、14名となった。内訳は以下の通りである：小学1年

生(1名)、小学2年生(3名)、小学3年生(1名)、小学4年生(1名)小学5年生(5名)、保護者(3名)、合計14名。

#### 4. 1 実施内容

(1) 型紙1を切り抜いてもらい、ひねりのない帯、1回ひねった帯(メビウスの帯)、2回ひねりの帯、3回ひねりの帯(メビウス3回ひねり)をそれぞれ作ってもらう。

#### ひねってメビウスを作ろう!



型紙1

ここでメビウスの意味をしっかりと説明する。

(2) 作った4つの帯をそれぞれ平面へ押しつけてもらう。ただし、やみくもに平面へ押しつけるのではなく、ひねりのない帯と2回ひねりについては四角形に、メビウス(1回、3回ひねり)については、三角形にするよう誘導する(図7)。特に3回ひねりを平面に押しつけたものはヘキサフレキサゴンの原型になっているため、この形をしっかりと観察してもらう。

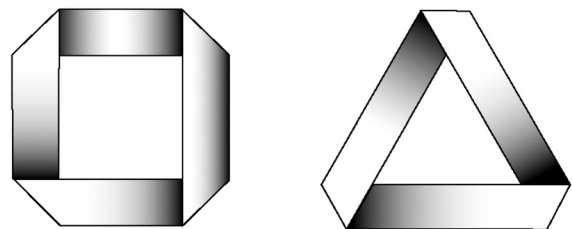


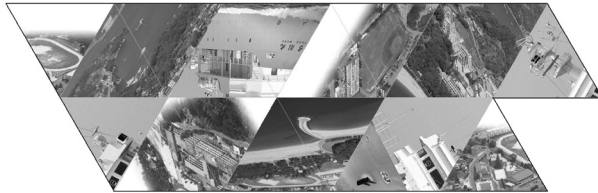
図7 2回ひねりと3回ひねり

(3) 押しつけた帯を中央から切ってもらう。よく知られた遊びであるが、ひねりなしなら2つの輪、1回ひねりなら大きな1つの輪、2回ひねりなら交叉した2つの輪、3回ひねりならリボン(結び目)になる。

(4) 型紙2を用いて、ヘキサフレキサゴンの3面折

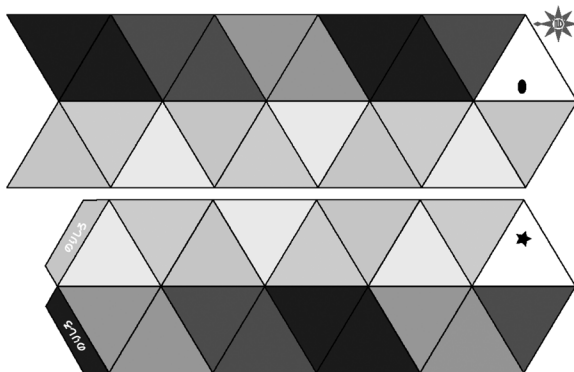
りを作ってもらおう。ここでは(2)で作ったメビウスの3回ひねりと同じになっていることを見てもらう(図7参照)。

この図版は完成した3つの面にそれぞれ弓削大橋、本校航空写真、および弓削丸(船)が出てくるようにしてある。作成にはFotoTHF<sup>7)</sup>というフリーソフトを用いた。



型紙2

(5) 次に型紙3を用いて6面ヘキサフレキサゴンを作ってもらおう。



型紙3

(6) 6面ヘキサフレキサゴンが出来たら、ゲーム形式で6色すべてを出してもらおう。具体的には全員の面を揃えた上で、誰が最初に目的とする面構成を完成出来るかを競ってもらおう。

(7) 最後に図6の多色1面(変則)折りに挑戦してもらおう。

以上の内容を2時間の公開講座として実施した。尚、型紙2, 3については、各パーツをつなぎ合わせ、2つ折りにして用いることに注意する。

#### 4.2 実際の反応

ここでは講師の視点から見た受講者の反応について時系列順に述べる。

4.1 (1) のメビウスの帯を作る段階では、ひねりなし、1回ひねりまでは全員スムーズに行うことが出来た。しかし、2回ひねり、3回ひねりは、帯を上手

くひねってつなげられない受講生も見受けられた。印象としては、帯のつなぎ目を自分の側で操作している受講生は割とすんなりつなげることが出来、自分から遠い側で帯をつないでいる受講生は何回ひねったかを数えるのに苦労していたようである。

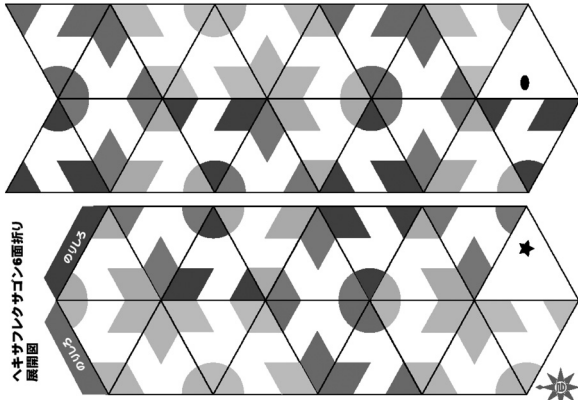
4.1 (2) は大人でも一瞬とまどう。実際に行ってみると分かるのだが、2回ひねり、3回ひねりした帯を平面に(それぞれ四角形、三角形となるように)押しつけるのは存外難しいのである。最初に形を決めるのではなく、出来上がった帯を中央から外へゆっくりと広げていくのがスムーズに行うコツである。やはりここでつまずく受講生が出たのであるが、講師がヒントを与えることでなんとか切り抜けられた。

4.1 (3) は受講生のほとんどが初めての経験だったようで、楽しそうに取り組んでいる姿が印象的であった。特に2回ひねりと3回ひねりを中央から切って出来る形を予想して、意に反したものが出来た時の驚きは大きかったようである。2回ひねりと3回ひねりを切り開いた形(交叉した2つの輪と結び目)の違いは、初見で区別がつきにくいらしく、ある子は「同じ」と主張し、またある子は「ちがう」と主張したのが印象的であった。

ここで受講生の1人がハサミで指を切ってしまった。幸い傷はごく浅かったのであるが、予想外のハプニングにこちらも戸惑ってしまった。その受講生は、その時点で興味をなくしたようで、「早く帰ろう」と同伴の保護者に何度も言っていたのが残念である。カッターで型紙を切り抜いた方が早く出来るところを、小学生が中心の講座になることを予想してハサミを使って行ったのであるが、それでもこういうハプニングが起こる。しかも指を切ったのは小学4年生であり、こちらが小学1, 2年生に気をとられている最中の出来事であった。今後はハサミを使う前の注意喚起を徹底し、十分に目を配っていかなければならないと感じた。

4.1 (4)~(6) については、低学年の児童は4.1 (4) の具体的な絵が分かりやすかったようである。高学年の児童は4.1 (5) の全色を出す操作に夢中であった。4.1 (6) のゲームでは、やはりというべきか、保護者の方々がダントツに早かった。この行程を通して分かったことは、ヘキサフレキサゴンを作る作業は、低学年であっても丁寧にハサミさえ使えばちょっとしたアドバイスで上手くいくということである。ただ、作業時間という点では、低学年と高学年で顕著な差が見られた。そこで、作るのが早い受講生には型紙4にも挑戦してもらった。これはMartin Gardnerの本<sup>3)</sup>で紹介されているデザインを元にして作った型紙である。各面を変化させていくと、同じ色でも星形、円、六角形と中央に現れる図

形が次々に変化し、色と図形の両方で楽しむことが出来る。



型紙 4

この辺りでヘキサフレクサゴンを作ること、他人の作業を手伝うことに飽きてきた受講生も出始めた。講座開始から1時間半が経過していた。これは昨年実施した際<sup>6)</sup>にも見られた反応で、型紙を使って折り、単に色を出していただくだけでは飽きるのも早ようである。

そこで満を持して変則折り (4.1 (7)) に挑戦してもらった。こちらが全員の前でサッと色を変え、1面に2色を出すと一瞬会場にどよめきが起こった。そしてやり方を教えずに考えてもらうことにした。ここにきて子供の世話ばかりしていた保護者も真剣に考え始めた。しかし、変則折りを自力で見つけるのはかなり難しかったらしく、誰も出来なかった。今度はやり方を教えて挑戦してもらった。このときの子供達の集中力は素晴らしいものがあった。次々に2色を出しはじめたのである。同時に受講生からは「ルービック・キューブみたい」、「手品みたい」、「これ(変則折り)を夏休みの自由研究として考えよう」という声も聞かれ、ここが今回のハイライトとなった。結局3色を1面に出せた受講生は現れなかったが、変則折りによる最後の盛り上がりを見て、今回の公開講座は終了した。

#### 4. 3 アンケート結果

前節では主催者側から見た講座の風景を紹介した。では、実際の受講生達はどの様に感じたのであろうか。ここでは本校企画広報室が受講直後に実施したアンケート結果を元に今回の講座を振り返りたいと思う。尚、参加14名の内、1名分が無回答であった。ここでは無回答分を除き、総数を13とする。

1. 今回の公開講座を何でお知りになりましたか：

- ・市又は町の広報誌 1名
- ・知人、友人 1名
- ・その他(小学校) 11名

2. 期間・日程について：

- ・ちょうど良い 10名
- ・長い 1名
- ・短い 2名

3. 参加してどう感じましたか：

- ・充分満足できた 11名
- ・おおむね満足できた 0名
- ・普通 2名

4. 感想やお気付きの点があればお聞かせ下さい：

- ・考えながら出来たので、とてもよかったです。来年も参加したい。
- ・いろいろな色とか図形がいっぱいあってすごいなと思いました。
- ・いろいろなものが出来てとても満足しました。
- ・わからないところがあったけどみんな考えて出来たので、よかった。(2名)
- ・不思議がいっぱいで楽しかった。(2名)
- ・ちょっとむずかしかったけど、楽しかったです。
- ・不思議なことや、なんでということをやってすごくおもしろかった。2日はやりたいぐらいおもしろかったです。
- ・メビウスの意味が分かったし、楽しかったので、またあったら来ようと思います。
- ・科学はすごいなと思いました。
- ・6色の分がおもしろかったです。でも、なかなか出来なかったです。
- ・弓削丸のがおもしろかった。



図8 公開講座の様子

以上がアンケート結果である (講座と関係の無い問いは省略した)。

今回の開催にあたり、近隣小学校の児童全員に公開講座のチラシが配布された。これは本校企画広報室の手配によるもので、このことが応募者増に直接つながったことがアンケート結果から分かる。

期間・日程については、殆どの参加者は2時間の開催時間に満足してくれたようであるが、長いと感じた参加者が1名いたことは、やはり残念である。しかし、一方では2時間でも短いという回答もある。この辺りの判断は難しいが、同じ内容でも、もう少し効率を上げて90~100分程度で実施したほうがよいのかもしれない。

参加してどう感じたかについては、殆どの参加者に満足してもらえたようであり、盛りだくさんの内容で行ったことが功を奏した形となった。

直接書いてもらった感想で分かることは、こちらが思った以上に本人達が必死で考えていたということである。また、印象に残った内容が各人各様である点も興味深い。来年も参加したいと書いてくれた受講生も複数名見受けられる。実は今回の参加者の中には、昨年も参加してくれた児童が含まれている。今年は昨年から内容を大幅に変更して行ったため、連続参加してくれた児童から特に不満の声は出なかったが、来年以降も連続参加する児童がいた場合、同じ内容では飽きられてしまうかもしれない。1つの改善方法としては、型紙4をヒントに、中央に出てくる絵柄を「ライオン」、「象」、「ウサギ」のように変えて、色と絵柄を同時に変化させて楽しめるようにすることが考えられる。しかし、このような公開講座が地域に定着し、連続参加者が見込める状況では、もう1つ別の題材を用意して1年おきにテーマを変えるような対策が必要であろう。これについては今後の課題としたい。

以上、幾つか今後の改善を検討すべき点も見つかったが、全体を通して主催者側、受講者側双方が満足 of いく公開講座であったと結論付けて良さそうである。

## 5. おわりに

3面折りから始め、4面、5面、6面と多数の型紙を用いてヘキサフレキサゴンを作っていくのも確かに面白い。しかし、小学生にとっては作業感が強くなり、2時間を通して工作ばかりをやったという印象になりかねないのではないかと。新鮮な感性を持った子供達は、時に驚異的な集中力を発揮するが、同時に飽きやすい年頃でもある。もっと多くの驚きや喜びを持続的に与えるにはどうすれば良いのか。その様な想いが前回の公開講座<sup>6)</sup> 終了後に残った。

そこで変則折りを講座に取り入れようと、本稿で解説したような方法でこの折り方を1から考えることにした。その後Martin Gardnerの最新刊<sup>3)</sup> が出版されたことを知り、そこで紹介されていた文献をたどっていくことで、変則折りがT. Bruce McLeanのいうV-flexと同じものだと分かった次第である。

今回の講座では、メビウスの帯に関する考察、ヘキサフレキサゴンの型紙の改良、変則折りの導入と盛りだくさんの内容で講座計画し、飽きさせない、驚きに満ちた2時間を目指した。使う型紙を少なくし、単調な繰り返しを極力減らして、考える時間を多めに取るよう配慮したつもりである。

ヘキサフレキサゴンの変則折りは、ここで紹介したような公開講座を行う場面で有効である。標準折りに対する驚きが、慣れに変わってきた頃に行うと、会場に新たな驚きと、活気を与えてくれる。ヘキサフレキサゴンを用いた公開講座等を企画しておられる方には、是非採用を検討していただきたい。

## 参考文献

- 1) 西山豊, 「ヘキサフレキサゴン (hexaflexagon) の一般解」『大阪経大論集』第54巻4号 (2003年11月) p.153-173.
- 2) T. Bruce McLean, V-Flexing the Hexahexaflexagon, American Mathematical Monthly, 86 (June-July 1979), p.457-466.
- 3) Martin Gardner, Hexaflexagons, probability paradoxes, and the Tower of Hanoi, Cambridge University Press (2008), p.1-15.
- 4) Joseph S. Madachy, Madachy's Mathematical Recreations, Dover (1979), p.62-81.
- 5) 戸田盛和, 『おもちゃセミナー』日本評論社 1973年 p.226-227.
- 6) 伊藤芳浩, 岩本豊, 猪川優子, 「作ってみよう!! 折り紙マジック」公開講座 (2008年8月7日)。
- 7) Foto-TriHexaFlexagon (THF): <http://britton.disted.camosun.bc.ca/fotothf/fotothf.htm>

## 謝 辞

本校の山尾徳雄教授、非常勤の雙知延行先生そして事務の白石千春さんには、今回の公開講座で協力をお願いし、急な要請にもかかわらず快く引き受けていただきました。この場を借りてお礼申し上げます。