# 2円孔を有する中空円筒の内圧問題

鶴　秀登*・小丸　維斗**

# Stress Concentration of a Hollow Cylinder with two Pinholes under Uniform Pressure

Hideto Tsuru*, Yuito Komaru**

Abstract

This paper deals with the stress concentration of a hollow cylinder with one or two pinholes submitted to uniform pressure on the inner surface. The analysis is performed by means of a finite element method and the commercial FEM software MD.Nastran and MSC.Patran are used. Numerical calculations are done for various combinations of the thickness of hollow cylinder, the size of a pair of equal holes and the space between them. Various mesh sizes are used to examine the stability of the results. The results of these calculations are illustrated in charts and they can be used in design.

## 1．緒　言

構造物の強度評価の目的で構造部材に生じる応力状態を知ることは重要である。応力状態は特別な場合に対して理論解析により厳密解が得られる場合もあるが，一般的には数値解法により求めることになる。数値解法には有限要素法（FEM），有限差分法（FDM），境界要素法（BEM），体積力法（BFM）などがあるが，中でもFEM解析は，コンピュータの能力向上とともに解法自身の進化により，精度良い解析結果を与えるようになってきた。また近年，市販のプリ・ポストプロセッサが非常に充実してきたことから，強度評価の可視化と部材内部の情報など実験解析では得にくいデータを提供する解析ツールとなっている[1][2]。

本研究では，複雑な構造物の強度評価対象部材に適用できるように，基本的な形状に存在する欠陥の応力解析を市販のFEMソフトを用いて行う。解析結果は破壊の一次因子である応力集中現象についての定量的なデータを与える[3][4]。

具体的には，内圧が作用する中空円筒に貫通する小さな1個または2個の円孔が円筒長手方向にある問題を解析し，円筒における円孔の相互干渉が，円孔周方向最大応力に及ぼす影響について検討し，データを提供する。なお，解析結果は欠陥の無い形状に対する欠陥の影響を定量的に理解できるようデータ整理を行い，その検討に厳密解を利用する。

## 2．解　析　条　件

Fig.1に示すような中空円筒（外径$D_O$，内径$D_I$）が，円筒軸方向に2個の同じ寸法の円孔（直径d，中心間距離x）を有し，円筒内周表面に一様な圧力$p$が作用する問題を取扱った。なお中空円筒軸方向の長さLは孔縁の応力分布に端面の影響が出ないことを考慮した寸法を用い，数値計算は$D_O$=100mm，L=200mmを一定とし，孔径比$d/D_O$＝0.10，0.15，0.20と孔中心間距離比x/d＝1.2，1.4，1.6，1.8，2.0，

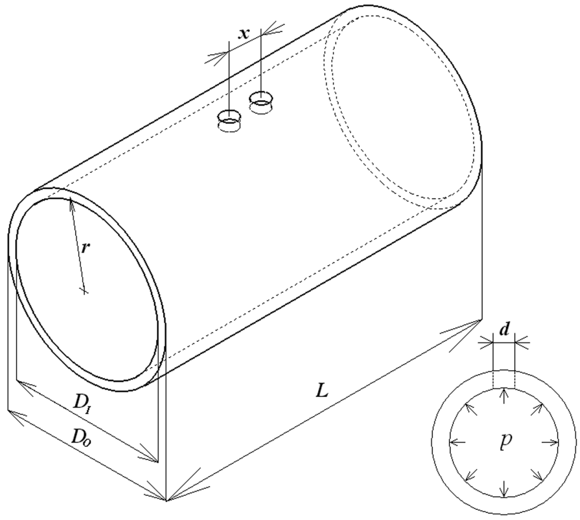


**Fig.1**　2円孔を有する中空円筒

＊弓削商船高等専門学校電子機械工学科
＊＊弓削商船高等専門学校専攻科生産システム工学専攻

平成21年9月30日受理

2.5，3.0の組合せ形状について行った。材料特性は軟鋼の縦弾性係数E=206×$10^3$N/$mm^2$，ポアソン比ν=0.3を用いた。数値解析は市販の有限要素法解析ソフトであるプリ・ポストプロセッサMSC.Patran，ソルバーMD.Nastranの四面体要素，10節点を用いた。そして問題の対称性を利用し形状の1/4を用いて解析した。

## 3．数 値 解 析

前項の形状について数値計算を行い，得られた結果はすべて式（1）の孔のない中空円筒の内圧問題[5]における円筒円周方向応力の最大値（内径上に生じる）$\sigma_\theta$*で無次元化した。

$$\sigma_\theta{}^* = p\frac{D_O{}^2 + D_I{}^2}{D_O{}^2 - D_I{}^2} \cdot\cdot\cdot (1)$$

また，この問題の応力集中係数として次式（2）を用いた。

$$\alpha = \frac{(\sigma_\theta)_{max}}{\sigma_\theta{}^*} \quad \cdots \quad (2)$$

ここで（$\sigma_\theta$）$_{max}$は孔縁の円周方向応力の最大値である。

### 3．1　分割数と解析精度

有限要素法による解の精度は，要素数を増やすことによる解の安定性から推定できるが，あくまで数値計算の精度で，実際の現象に対する精度そのものを示すとはかぎらない。問題を数値解析する場合，形状モデルの作成と境界条件の与え方に問題との誤差がすでに含まれると，その数値結果は要素を増やしていっても現象を正しくシミュレーションできない。このことに細心の注意を払い，その上で要素数を解析時間と結果の関係から決定することになる。

そこで分割数と解の安定性から解析精度を検討するために，解析上厳しい形状である円筒肉厚（$D_O$-$D_I$）/2が薄く，小さい孔（$D_I$/$D_O$＝0.9，d/$D_O$＝0.10）で，孔の相互干渉がない問題（x/d＝∞）を解析した。数値解析結果に大きく影響すると考えられる応力集中部の孔深さ方向の分割数と孔縁の分割数を種々変化させて数値計算し，分割数と式（2）で定義した応力集中係数αの関係をTable 1に示す。孔深さ方向の分割数と孔縁の分割数が多くなれば安定した結果が得られるが，後者を多くした方がやや安定した結果を得ている。なお最大応力の生じる位置は円筒軸方向の孔縁で，Fig.2にこの円孔縁の応力$\sigma_\theta$の孔深さ方向の応力分布を示す。縦軸に式（1）の最大値$\sigma_\theta$*で無次元化した孔縁の応力，横軸は孔深さ方向の無次元座標である。孔縁分割数を10として孔深さ方向分割数が10と20の場合の結果を示す。横軸の無次元座標（2r-$D_I$）/$D_O$＝0は内周（r=$D_I$/2）であり，0.1が外周（r=$D_O$/2）の位置を表している。より良い孔深さ方向の応力分布を得るために，孔縁の分割数よりも孔深さ方向の分割数が大きく影響することが考えられるが，孔深さ方向の分割数10で応力分布は非常に安定し，孔深さ方向分割数を20以上に取っても同様の応力分布となった。

そこで孔深さ方向分割数10と孔縁分割数10とす

**Table 1**　孔の分割数と応力集中係数αの関係
（$D_I$/$D_O$＝0.9，d/$D_O$＝0.10，x/d＝∞）

| | 孔縁分割数 | | |
|---|---|---|---|
| 孔深さ方向分割数 | 5 | 10 | 20 |
| 5 | 3.41 | 3.39 | 3.42 |
| 10 | 3.39 | 3.44 | 3.41 |
| 20 | 3.40 | 3.43 | 3.41 |

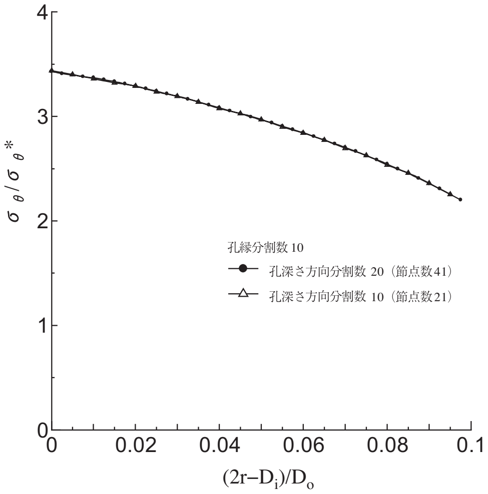


**Fig.2**　$\sigma_\theta$の孔深さ方向応力分布に対するメッシュ分割数の影響（$D_I$/$D_O$＝0.9，d/$D_O$＝0.1，x/d=∞）

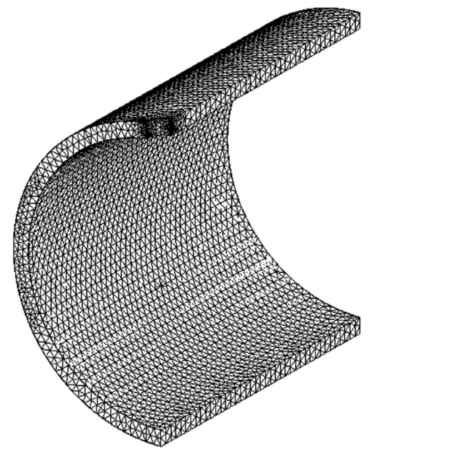

**Fig.3**　メッシュ分割例（$D_I$/$D_O$＝0.9，d/$D_O$＝0.1）

る。

この問題($D_I/D_O = 0.9, d/D_O = 0.10, D_O = 100$[mm])における肉厚（$D_O$-$D_I$）/2＝5［mm］，孔縁の長さ$\pi d/4=10\pi/4$[mm]を孔深さ方向分割数10，孔縁分割数10としたときのメッシュサイズ（肉厚方向5/10，孔縁$10\pi/4/10$）と同程度となる要素分割数を用いて全形状を解析した。Fig.3に解析に用いたメッシュ分割例を示す。

### 3．2　１円孔の問題

まず孔の相互干渉がない場合（x/d=∞）に相当する１円孔の問題を数値解析し，応力分布と応力集中係数を求めた。Fig.4に内外径比$D_I/D_O = 0.7$，Fig.5に$D_I/D_O = 0.8$，Fig.6に$D_I/D_O = 0.9$の肉厚に対して，孔径比$d/D_O$を0.05，0.10，0.15，0.20と種々変化させた形状の孔縁の孔深さ方向の応力分布を示す。縦軸に孔縁の円筒周方向の無次元応力をとり，横軸は内周（$r = D_I/2$）から外周（$r = D_O/2$）までの無次元座標を用い，孔径比$d/D_O$をパラメータにして図示した。なお記号のついていない実線は孔のない円筒問題[5] の無次元応力分布である。

孔径比$d/D_O$が小さくなると円筒内周と外周の表面近傍の応力の値が急激に下がることがわかる。最も小さい孔径比$d/D_O = 0.05$の結果は，精度は良くないもののその傾向は顕著に表れ，孔縁の最大応力が内周表面より少し内側に存在することがわかる。

次にこれらの形状に対して，式(2)で定義した応力集中係数を求めTable 2に示す。内外径比$D_I/D_O$が大きいほど，すなわち肉厚が薄いほど応力集中係数は孔径比$d/D_O$による変化が大きいことがわかる。この結果をFig.7に，縦軸に応力集中係数$\alpha$，横軸に孔径比$d/D_O$，パラメータに内外径比$D_I/D_O$をとり示す。図中の破線は，直径dの孔をもつ板幅$D_O$の帯板の一様引張りにおける公称応力を用いた応力集中係数で，孔が小さくなる極限における応力分布はよく知られており，その応力集中係数$\alpha$は3となる。また円筒問題においても円孔が小さくなる極限$d/D_O = 0$では，円筒の曲率の影響が無視できて無限に広い厚板の応力集中問題と同じになることが推定でき，応力集中係数$\alpha = 3$となる[5]。この結果へ本計算結果を延長して示した。図より，内外径比$D_I/D_O$

**Table 2**　１円孔の応力集中係数$\alpha$

| $D_I/D_O$ \ $d/D_O$ | 0 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.7 | 3.00 | 2.83 | 2.82 | 2.95 | 3.18 |
| 0.8 | 3.00 | 2.94 | 3.01 | 3.28 | 3.65 |
| 0.9 | 3.00 | 3.09 | 3.41 | 4.00 | 4.60 |
| 帯板 | 3.00 | 2.88 | 2.76 | 2.64 | 2.53 |

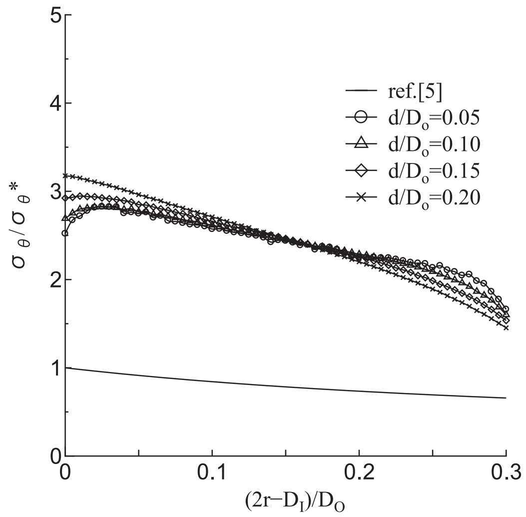


**Fig.4**　孔縁の$\sigma_\theta$の深さ方向分布（$D_I/D_O = 0.7$）

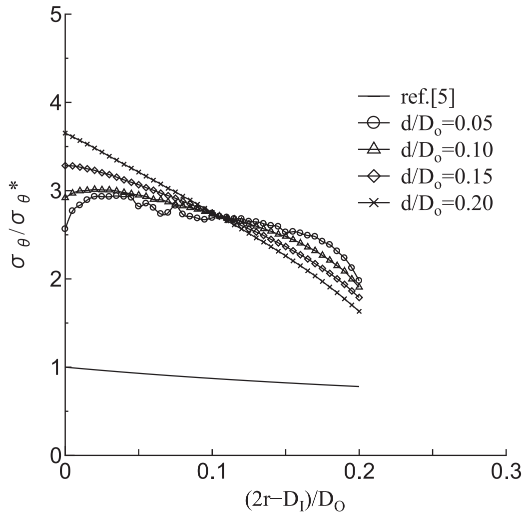


**Fig.5**　孔縁の$\sigma_\theta$の深さ方向分布（$D_I/D_O = 0.8$）

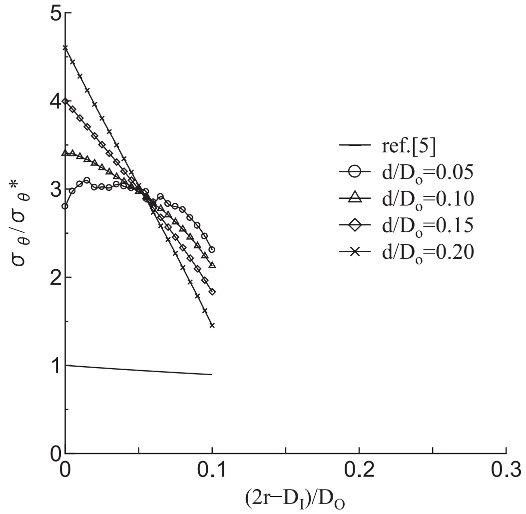


**Fig.6**　孔縁の$\sigma_\theta$の深さ方向分布（$D_I/D_O = 0.9$）

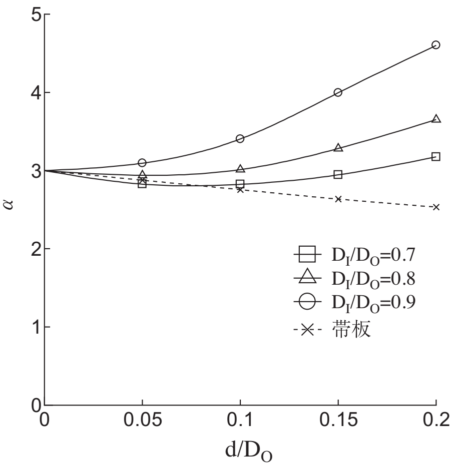


**Fig.7**　1円孔の応力集中係数α

**Table 3**　2円孔の応力集中係数α（$D_I/D_O=0.7$）

| | d/$D_O$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.05 | | 0.10 | | 0.15 | | 0.20 | |
| x/d | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ |
| 1.0 | ∞ | 3.60 | ∞ | 3.77 | ∞ | 4.21 | ∞ | 4.81 |
| 1.2 | 4.05 | 3.11 | 4.17 | 3.18 | 4.52 | 3.36 | 5.13 | 3.61 |
| 1.4 | 3.19 | 2.98 | 3.32 | 3.06 | 3.68 | 3.22 | 4.12 | 3.41 |
| 1.6 | 2.99 | 2.96 | 3.06 | 3.00 | 3.41 | 3.12 | 3.70 | 3.30 |
| 1.8 | 2.89 | 2.93 | 3.01 | 2.95 | 3.26 | 3.07 | 3.56 | 3.30 |
| 2.0 | 2.87 | 2.90 | 2.97 | 2.93 | 3.19 | 3.02 | 3.43 | 3.18 |
| 2.5 | 2.84 | 2.89 | 2.90 | 2.87 | 3.08 | 2.95 | 3.26 | 3.10 |
| 3.0 | 2.85 | 2.87 | 2.87 | 2.84 | 2.98 | 2.92 | 3.17 | 3.07 |
| ∞ | 2.83 | | 2.82 | | 2.95 | | 3.18 | |

**Table 4**　2円孔の応力集中係数α（$D_I/D_O=0.9$）

| | d/$D_O$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.05 | | 0.10 | | 0.15 | | 0.20 | |
| x/d | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ | $\alpha_A$ | $\alpha_B$ |
| 1.0 | ∞ | 3.91 | ∞ | 5.15 | ∞ | 6.46 | ∞ | 7.87 |
| 1.2 | 4.53 | 3.47 | 5.74 | 4.09 | 7.20 | 4.78 | 8.56 | 5.43 |
| 1.4 | 3.62 | 3.32 | 4.57 | 3.87 | 5.59 | 4.50 | 6.49 | 5.11 |
| 1.6 | 3.36 | 3.27 | 4.14 | 3.75 | 4.99 | 4.35 | 5.71 | 4.95 |
| 1.8 | 3.25 | 3.22 | 3.94 | 3.68 | 4.69 | 4.26 | 5.35 | 4.86 |
| 2.0 | 3.20 | 3.18 | 3.82 | 3.63 | 4.50 | 4.19 | 5.14 | 4.80 |
| 2.5 | 3.14 | 3.11 | 3.67 | 3.54 | 4.27 | 4.11 | 4.89 | 4.74 |
| 3.0 | 3.10 | 3.10 | 3.58 | 3.50 | 4.18 | 4.09 | 4.79 | 4.71 |
| ∞ | 3.09 | | 3.41 | | 4.00 | | 4.60 | |

が大きい，すなわち肉厚が薄い円筒の応力集中係数が常に大きくなることがわかる。そして，近似的に帯板の結果を代用すると危険側の設計になることがわかる。

### 3．3　2円孔の問題

円筒軸方向に2個の同じ寸法の円孔がある場合の相互干渉問題について，内外径比$D_I/D_O$，2円孔の中心間距離比x/d，孔径比d/$D_O$を種々変化させ，円孔縁の点Aと点Bに生じる応力から式(2)で定義した応力集中係数$\alpha_A$と$\alpha_B$を求めた。Table 3に内外径比$D_I/D_O=0.7$の結果を，Table 4に肉厚が薄い$D_I/D_O=0.9$の結果を示す。なお中心間距離比$x/d=1.0$で円孔同士が接し，内側の応力集中係数$\alpha_A$は無限大となるが，外側の応力集中係数$\alpha_B$は有限値をとる。この場合，力学現象を解釈したモデルを用いて計算した。また，円孔間が充分に離れているx/d=∞の場合の応力集中係数αは，1円孔問題の結果となる。これらを2円孔の内側の孔縁点AについてFig.8とFig.9に，外側の孔縁点BについてFig.10とFig.11に，縦軸に応力集中係数$\alpha_A$（または$\alpha_B$），横軸に孔中心間距離比x/d，パラメータに孔径比d/$D_O$をとって示す。なお，各孔径比について相互干渉がなくなる場合（x/d＝∞），すなわち1円孔問題の応力集中係数αの結果を破線で示した。

解析結果より，外側の孔縁では2円孔の相互干渉が小さく，2円孔が接する場合でも最大で1円孔問題の約1.7倍である。また内側の孔縁でも孔2つ分のすきまをもつx/d＝3の場合に，計算したすべての孔径比d/$D_O$について1円孔に比べ最大約5％程度大きくなっているにすぎず，2円孔間の相互干渉が孔2つ分の間隔でほぼ無くなることがわかる。そのため，図は孔2つ分のすきまをもつx/d＝3までの結果を示した。また孔1つ分のすきま（x/d＝2.0）にお

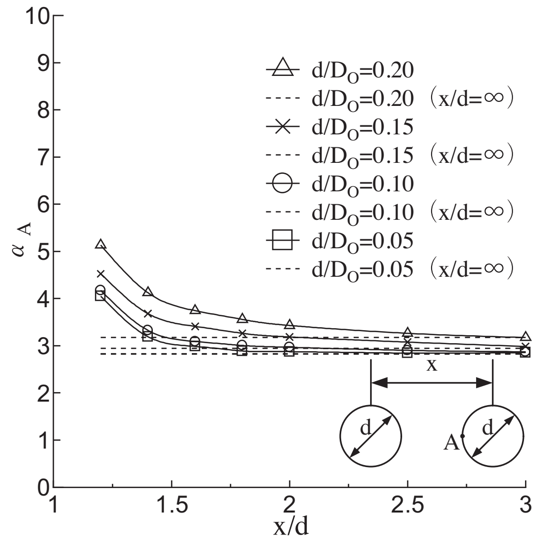


**Fig.8**　$\alpha_A$とx/dの関係（$D_I/D_O=0.7$）

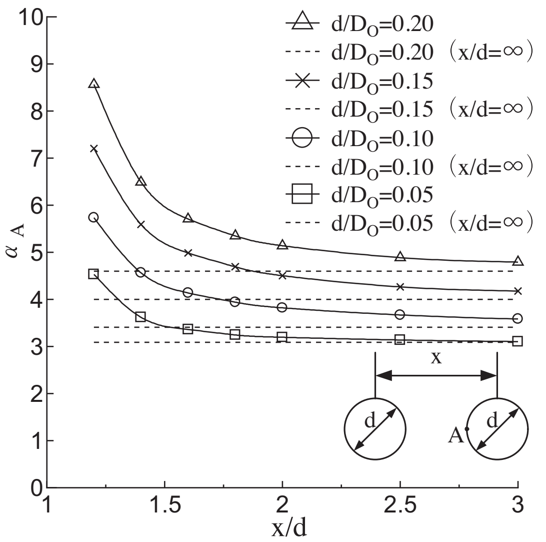

Fig.9　$\alpha_A$とx/dの関係（$D_I/D_O=0.9$）

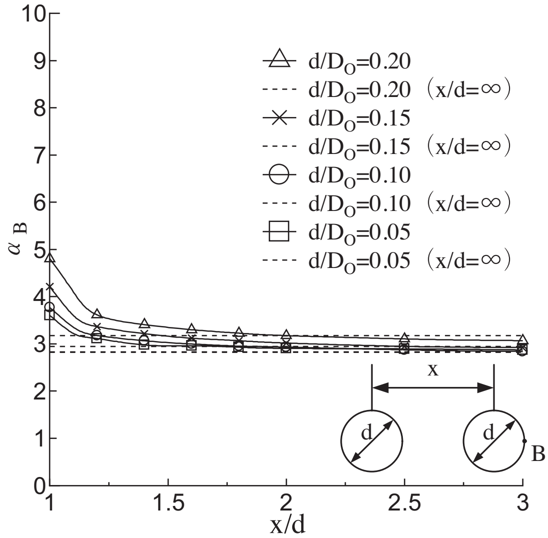

Fig.10　$\alpha_B$とx/dの関係（$D_I/D_O=0.7$）

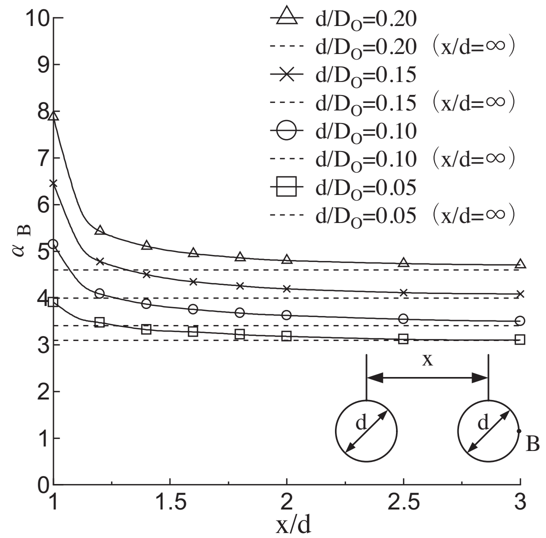

Fig.11　$\alpha_B$とx/dの関係（$D_I/D_O=0.9$）

ける$\alpha_A$は１円孔に比べ最大約13％大きい程度に過ぎないが，孔１つ分よりすきまが小さくなると$\alpha_A$が急激に大きくなることがわかる。

## ４．結　　言

中空円筒の軸方向に１円孔または２円孔を有し，その内周表面に一様な圧力が作用する問題を円筒の内外径比，孔径比，孔中心間距離比を種々変え，破壊の起点を知るための一次因子となる応力集中について数値解析を行い，孔縁の応力分布と応力集中係数についてまとめた。得られた結果は以下の通りである。

・１円孔問題において孔深さ方向の応力分布は，どの内外径比でも孔表面より少し孔の深さ方向内側で最大値をもつことがわかった。これは孔が小さくなるほど明確になり，ポアソン比による影響と考えられる。

・１円孔問題において，孔の小さくなる極限の応力集中係数は，厚板の引張りと同様3に近づくことが数値計算結果からも推定できる。

・１円孔および２円孔問題において内外径比が大きくなる，すなわち肉厚が薄くなるほど，応力集中係数は大きくなる。

・２円孔の問題では，孔縁内側の応力集中係数は円孔間のすきまが孔２つ分以上できると，内外径比0.7以上では孔の相互干渉効果は最大約５％程度しかなく，干渉による影響がほぼなくなることがわかる。

・２円孔の問題では，内外径比，孔径に関係なく孔１つ以上のすきまができると内側と外側の応力集中係数の変化は小さく，孔１つのすきまのときの内側の応力集中係数でも，孔２個のすきまに比べ約８％大きいにすぎない。しかし，孔１つ分以下のすきまになると内側では干渉効果が急激に大きくなることがわかる。また内側の孔縁でも孔２つ分のすきまをもつx/d＝3の場合に，計算したすべての孔径比$d/D_O$について１円孔に比べ最大約５％程度大きくなっているにすぎず，２円孔間の相互干渉が孔２つ分の間隔でほぼ無くなることがわかる。

・２円孔が接した状態における外側の応力集中係数は，計算した範囲内で１円孔問題の最大約1.7倍で，孔が小さくなるほど，また肉厚が厚くなるほど小さくなる。

## 参考文献

［1］日本材料学会編：初心者のための有限要素法（日本材料学会），（昭50-5）．

［2］遠田良喜：有限要素法の基礎（培風館）1984-4.
［3］西谷：日本機械学会論文集（A編），48巻，447号PP.1353～1359，（昭58-11）.
［4］村上敬宜：応力集中の考え方（養賢堂）2005-7.
［5］S.P.Timoshenko & J.N.Goodier：Theory of Elasticity McGraw-Hill 3rd ed. (1970)