

# 応力集中問題の FEM 解析における 境界条件と結果の評価

鶴 秀登\*・柏原 一仁\*\*・田宮 裕二\*\*・村上 智洋\*\*\*

## Boundary Condition and Estimate of Numerical Results in FEM Analysis for Stress Concentration Problem

Hideto Tsuru\*, Kazuhito Kashihara\*\*, Yuji Tamiya\*\*  
and Tomohiro Murakami\*\*\*

### Abstract

The finite element method (FEM) has been known to be one of powerful numerical analysis for stress concentration problem. But in applying this method to the problem of general stress concentration in finite body, it is difficult to know the accuracy and validity of numerical analysis. Then before applying this method to sophisticated problems, several similar fundamental problems whose reliable solutions are available should be analyzed in order to know them. This paper is concerned with a procedure of FEM analysis in order to know the accuracy and validity.

**Key words:** Finite Element Method (FEM), Stress Concentration, Numerical Analysis, Accuracy

### 1. 緒言

構造部材の強度評価は、材料の機械的性質および荷重と形状による応力状態等を知ることで行える。実験による強度評価とともに数値実験による評価も有限要素法(FEM)の発達とともに盛んに行われ、精度良い評価を与えてきている。しかし、初心者が FEM を使用する場合、その適用範囲や数値結果の検討を行うことは難しい。

そこで本研究では、基本的形状について FEM による数値計算を行い、その結果について検討する手順について述べる。FEM は基本的にはどのような応力集中問題も数値計算できる。ただし、特異性をもつ場合に精度良い結果を得るためには、そのことを考慮した解析法を組まなければならない。しかし、特別な配慮なしに要素を小さくして数値計算する場合もあり、その出力結果が妥当であるかどうか、さらに精度はどうかは結果を使用する人が判断しなければならない。そのような場合に、既知の厳密解を特別な場合として利用することがある。解の傾向と数値解を極限へ延長したときの厳密解との整合性を検討することで数値結果の妥当性が推定できる。

有限体で計算を行う応力集中問題の FEM 解析で、厳密解が得られている無限体問題を取扱うための条件はどうかを具体的に数値計算して検討する。

### 2. 解析手順

数値解析は基本的形状である長方形板に切欠きがある 2 次元一様引張問題における応力集中を取扱った。問題は中央に円孔がある場合(図 1(a))、両側に半円切欠きがある場合(図 2(a))および片側に半円切欠きがある場合(図 3(a))である。数値計算において材料定数は縦弾性係数  $E=206[\text{GPa}]$ 、ポアソン比  $\nu=0.3$  とした。解析形状は対称性を考慮し、中央円孔問題と両側半円切欠き問題では解析形状全体の 1/4 の領域、片側半円切欠き問題では 1/2 の領域で対称面に変位固定の境界条件を与えて数値計算した。要素は四角形要素、4 接点を使用し、切欠き縁を 120 分割、その他の分割は要素形状が同じ大きさ程度から順次変化するような分割数とした。図 1(b)、図 2(b)、図 3(b)にそれぞれの要素分割例を示す。なお、使用した FEM ソフトは市販のプリ・ポストプロセッサ(MSC.Patran)、ソルバー(MD.Nastran)である。

\*電子機械工学科

\*\*電子機械工学科 5 年生

\*\*\*専攻科生産システム工学専攻

### 3. 数値計算結果と検討

数値計算結果に用いる応力集中係数  $K_t$  は、切欠き底の最大応力を切欠き底のリガメントの公称応力で無次元化した次式を用いた。

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \dots (1)$$

表1, 2と図4, 5に図1に示す中央に円孔をもつ有限板の1様引張問題の応力集中係数  $K_t$  を示す。有限長さの結果についてはその精度は不明である。そこで、帯板の厳密解<sup>1)</sup>を利用して精度を検討することを試みた。板幅  $2W$  と孔径  $2a$  の比  $a/W=0.2$  と  $0.5$  の問題について、有限板の縦横比  $y/W$  を正方形 ( $y/W=1$ ) から帯板に近づくよう  $y/W$  を大きくして計算を行った。表1にその数値結果を、また図4に縦軸に  $K_t$ , 横軸に  $y/W$  を取り示す。 $y/W=2$  以上になるとほぼ帯板の結果になることがわかる。有限長さの板については  $K_t$  が連続的に帯板の解へ変化していることから、有限長さの問題の精度も帯板の精度と同程度であると推定できる。図5は横軸に板幅と孔径の比  $a/W$ , パラメータに板の縦横比  $y/W$  を取り示す。孔が大きい場合には板の長さの影響が大きいことがわかる。表2はその数値結果を示す。

同様に2軸対称問題である図2の両側半円切欠き問題の応力集中係数  $K_t$  に及ぼす板長さの影響を検討した。表3にこれらの数値結果を示す。板の長さと板幅の比  $y/W$  が2では、ほぼ帯板の結果となることがわかる。図6に横軸に半円切欠き半径  $a$  と板幅の半分の長さ  $W$  との比  $a/W$  を用い、パラメータに  $y/W$  を取って示す。有限長さの影響はあるが、円孔問題ほど大きくないことがわかる。また、帯板の解と比較してわかるように、有限長さの結果が精度良いことが推定できる。

次に1軸対称問題である図3に示す片側半円切欠き問題を取扱った。片側切欠きであるため荷重端の変位が2軸対称問題と異なる。そのため板の長さや切欠きの大きさの影響は今までと異なることが予想される。図7, 8と表4にその数値結果を示す。図7は板の長さの半分  $y$  と板幅  $W$  の比  $y/W$  を横軸に取り、切欠き半径  $a$  と板幅  $W$  の比  $a/W$  をパラメータとして応力集中係数  $K_t$  の結果を示す。図よりどの切欠きの大きさ  $a/W$  に対しても、板の長さ  $y/W$  による  $K_t$  の変化は小さいことが示された。図8は横軸に切欠きの大きさの比  $a/W$  を取り、 $y/W=2$  の結果を同じ長さの両側半円切欠きの結果と比較して示した。両者は  $a/W$  が大きくなると  $K_t$  が大きく異なることがわかる。

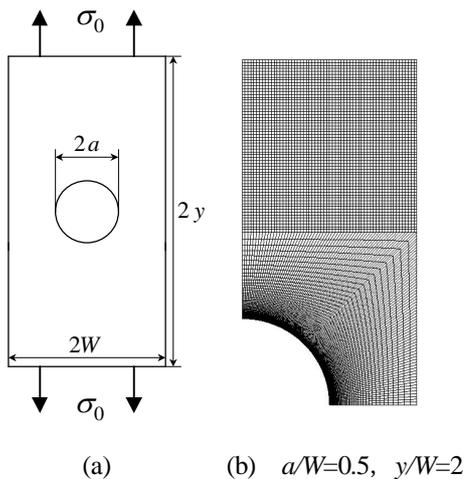


図1 中央円孔問題と要素分割例

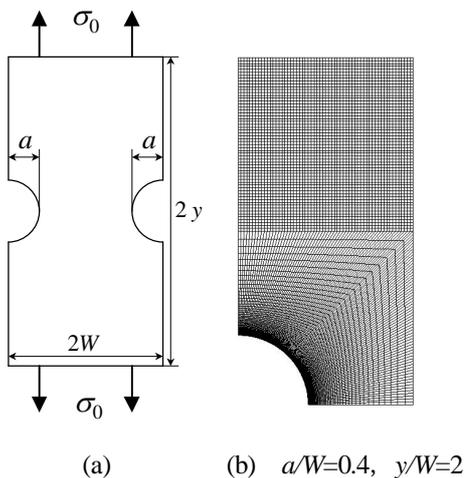


図2 両側半円切欠き問題と要素分割例

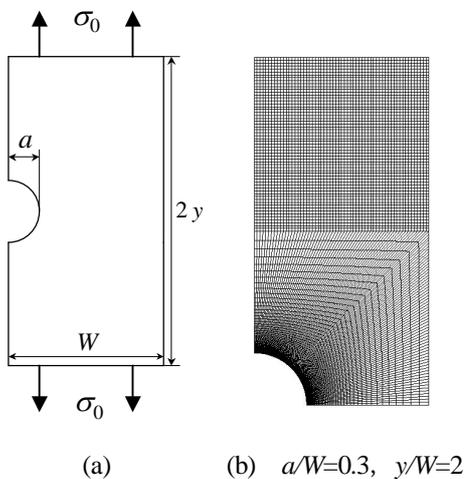


図3 片側半円切欠き問題と要素分割例

表1 中央に円孔をもつ有限板の  $K_t$  への板長さの影響

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \left(1 - \frac{a}{W}\right)$$

y/W	a/W	
	0.2	0.5
1.0	2.69	3.19
1.2	2.61	2.65
1.4	2.57	2.38
1.6	2.54	2.26
1.8	2.53	2.21
2.0	2.53	2.19
2.2	2.53	2.18
[1]	2.52	2.17

さらに、片側切欠きであるためにリガメントに生じる曲げを考慮して、次式で無次元化した結果を表 4 に示し、図 8 に加えた。

$$\left. \begin{aligned} K_t' &= \frac{\sigma_{max}}{\sigma_b} \\ \frac{\sigma_b}{\sigma_0} &= \frac{W}{W-a} + \frac{3aW}{(W-a)^2} \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

表 4 に示すように材料力学的に曲げを考慮して応力集中係数を求めると、両側切欠き問題と同様に曲げによる影響が少なくなった数値となり、厳密解との関係から精度良い結果であることが推定できる。

表2 中央に円孔をもつ有限板の  $K_t$  への孔の影響

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \left(1 - \frac{a}{W}\right)$$

a/W	y/W		
	1	2	[1]
0 <sup>[3]</sup>	3	3	3
0.05	2.89	2.87	2.86
0.1	2.78	2.74	2.73
0.2	2.69	2.53	2.52
0.3	2.72	2.37	2.36
0.4	2.86	2.26	2.25
0.5	3.20	2.19	2.17
0.6	3.79	2.14	
0.7	4.89	2.12	
0.8	6.72	2.10	

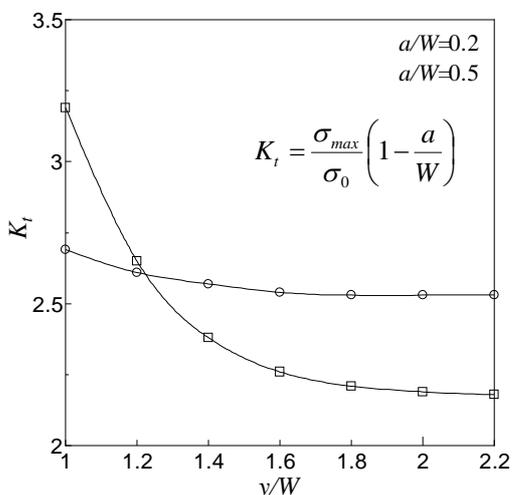


図4 中央に円孔をもつ有限板の  $K_t$  への板長さの影響

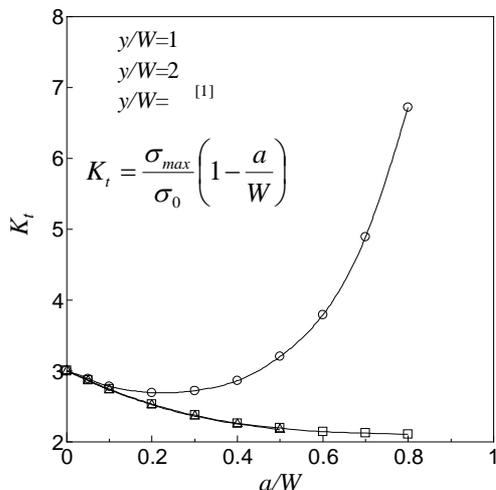


図5 中央に円孔をもつ有限板の  $K_t$  への孔の影響

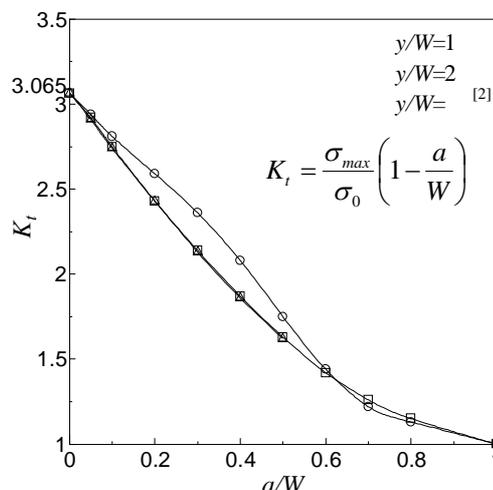


図6 両側半円切欠きをもつ有限板の  $K_t$

表3 両側半円切欠きをもつ有限板の  $K_t$

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_0} \left(1 - \frac{a}{W}\right)$$

$a/W$	$y/W$		
	1	2	[2]
0 <sup>[4]</sup>	3.065	3.065	3.065
0.05	2.94	2.92	2.91
0.1	2.81	2.75	2.74
0.2	2.59	2.43	2.43
0.3	2.36	2.14	2.13
0.4	2.08	1.87	1.86
0.5	1.75	1.63	1.62
0.6	1.44	1.42	
0.7	1.22	1.26	
0.8	1.13	1.15	
1.0	1.00	1.00	1.00

表4 片側半円切欠きの曲げを考慮した  $K_t'$  ( $y/W=2$ )

$a/W$	$\sigma_b/\sigma_0$	$K_t'$
0	1	3.065 <sup>[4]</sup>
0.2	2.19	1.79
0.4	5	1.36
0.5	8	1.25
0.6	13.75	1.16
0.7	26.67	1.11
0.8	65	1.06

#### 4. 結 言

FEMを用いて、有限板に切欠きがある一様引張問題の応力集中を取扱い、中央に円孔がある問題、両側半円切欠き問題、および片側半円切欠き問題の応力集中係数を図と表に与えた。そして、その過程においてFEMの数値結果の精度と適用性についての検討手順を示した。すなわち、未知の問題の数値結果の精度は、既知の解を未知問題の特別な場合として解析し、数値結果とグラフにより比較・検討して推定した。またその際、大きな数値を取扱うことのないような無次元化を考えることで精度評価が容易になることも示した。

#### 参考文献

- [1] 石田：だ円孔を有する帯板の引張り（第一報），日本機械学会論文集 第21巻第107号，pp. 507-513，1955.
- [2] 石田：両縁に半円切欠を有する帯板の引張り，日本機械学会論文集 第19巻第83号，pp. 5-10，1953.
- [3] S. P. Timoshenko and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, 3rd ed. , (1970), McGraw-Hill Int. Book.
- [4] Isida : 徳島大学工学部研究報告，第4巻，第1号，(1953-1)，pp. 67-69.

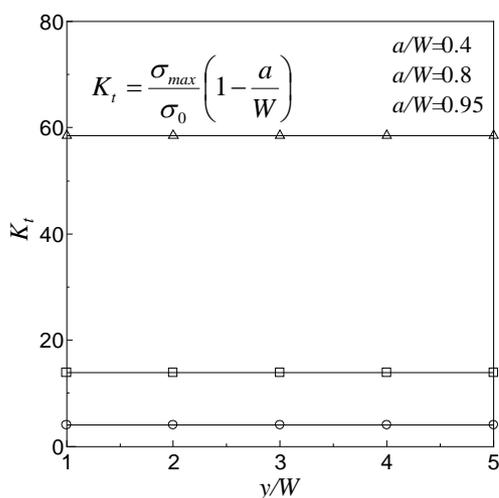


図7 片側半円切欠きをもつ有限板の  $K_t$  への板長さの影響

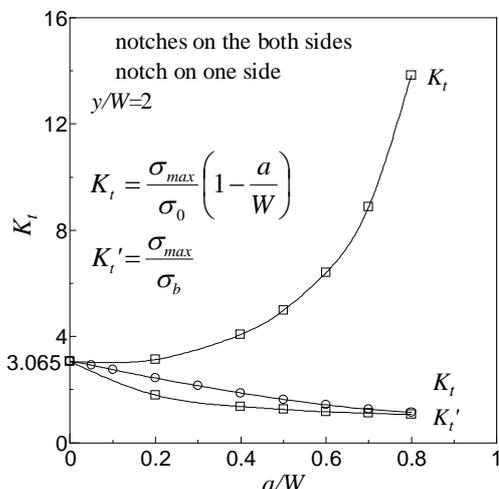


図8 片側半円切欠きをもつ有限板の  $K_t, K_t'$