切欠き近傍のき裂の応力場の簡便解法

鶴　秀登*・村上　智洋**

Method of Approximate Calculation for SIF of Crack Near Notches

Hideto Tsuru*, Tomohiro Murakami**

Abstract

It is important to know the value of stress intensity factor (SIF) of a crack near notches. There is a lot of results by means of many analytical or numerical analyses. But it is difficult to analyzed the general crack problem. Then in this paper, tension problems of a crack near notches are treated by means of approximate analysis. The analysis is fundamentally base on the principle of superposition. Numerical results on typical crack problems are shown in good agreement with the known solutions within a range.

Key words : Crack, Stress Intensity Factor(SIF), Principle of Superposition, Stress Concentration

1. 緒　言

構造物や機械の設計あるいは使用において破壊は避けられない問題であり，強度上安全であるか否かについて検討することは必要不可欠である。破壊の原因は多種多様であるが，材料強度学の基礎である線形破壊力学を用いた強度評価法は広く取入れられている。その際，き裂先端近傍の応力場の厳しさのパラメータとして応力拡大係数が用いられる[1][2]。き裂の解析には特異要素を組込んだ有限要素法(Finite Element Method :FEM)，体積力法(Body Force Method :BFM)，境界要素法(Boundary Element Method :BEM)などが用いられているが，数学的な取扱いが複雑であり容易ではない。

そこで，本研究では切欠き近傍のき裂の応力拡大係数を算出する方法として簡便な近似解法を検討し，その適用範囲と精度について定量的な評価を行った。具体的には，既知である1円孔とき裂，2円孔とき裂，2き裂の問題を精度評価に取扱い，片側半円切欠きとき裂，片側正方形切欠きとき裂などの未知の問題を解析し，強度評価に欠かせない応力拡大係数の修正係数の近似値を図に示した。

2. 解析方法

図1に示すようなき裂をもつ無限板が遠方一様応力を受ける場合すなわち(a)の問題は，(b)と(c)の重ね合わせで得られ，き裂先端近傍の応力場の強さを表わす応力拡大係数は，き裂面に内圧が作用するき裂問題の応力拡大係数に置換えられる。このことを図2(a)に示すような切欠き近傍のき裂のモードⅠ変形問題に適用することを考える。図2(a)の問題は図2(b),(c)の重ね合わせにより得られる。ここで(b)の問題におけるき裂相当位置の応力分布 $p(x)$は一般的にはFEM等で求められる。また，図2(c)は$p(x)$をき裂面に内圧として作用させた場合である。そして，図2(a)の問題の応力拡大係数は図 2(c)の問題を解いて得られる。しかしこの相互干渉を含む問題は簡便に得られない。そこで図3(b), (c)の重ね合わせによる近似解法を試みた。この重ね合わせはき裂縁自由の条件は満たすが，切欠き縁自由の条件が2次的に不完全である。そして図 3(c)の応力拡大係数は簡便に次式で得られる[1]。

---

*電子機械工学科
**専攻科生産システム工学専攻

平成22年9月30日受理

$$K_{\mathrm{I},A} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} p(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \cdots (1)$$

$$K_{\mathrm{I},B} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{a} p(x) \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \cdots (2)$$

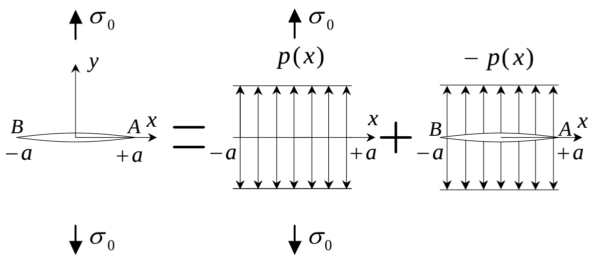
ここで，応力分布 $p(x)$を最小二乗法により 2 次式で近似する。

$$p(x) = c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \cdots (3)$$

すると，き裂先端 A および B の応力拡大係数の修正係数 $F_{\mathrm{I},A}$，$F_{\mathrm{I},B}$ は次式となる。

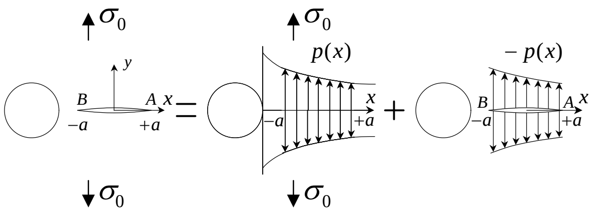
$$F_{\mathrm{I},A} = \frac{K_{\mathrm{I},A}}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{c_2 a^2}{2} + \frac{c_1 a}{2} + c_0 \right) \cdots (4)$$

$$F_{\mathrm{I},B} = \frac{K_{\mathrm{I},B}}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = \frac{1}{\sigma_0} \left(\frac{c_2 a^2}{2} - \frac{c_1 a}{2} + c_0 \right) \cdots (5)$$



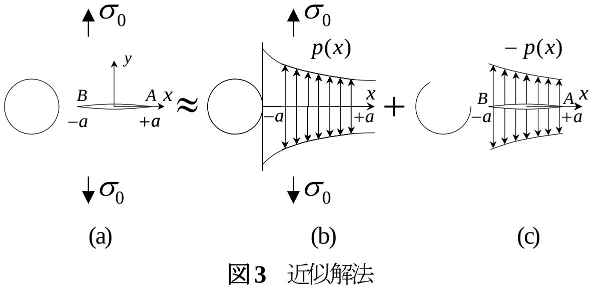
(a)　(b)　き裂なし　(c)　内圧を受けるき裂

図 1　1 き裂をもつ無限板の一様引張り



(a)　(b)　き裂なし　(c)　内圧を受けるき裂

図 2　切欠き近傍にき裂をもつ無限板



(a)　(b)　(c)

図 3　近似解法

3．数値計算結果と検討

まず適用範囲と精度を検討するため，前項の解析手法に従い既知の問題を取扱った。

図 4, 5 に遠方で一様引張りを受ける円孔近傍のき裂問題[3]の解析結果を示す。円孔の直径とき裂長さを $2a$，円孔とき裂の中心間距離を d とし，き裂長さ $2a$ と中心間距離の比 $2a/d$ を変化させて数値計算を行った。図 4 は円孔によるき裂相当位置の応力分布 $p(x)$とその式(3)による最小二乗近似(LSM)を比較して示す。なお，半径 a の円孔によるき裂相当位置の応力分布は次式を用いた[4]。

$$\left. \begin{aligned} p(x') &= \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2}{2x'^2} + \frac{3a^4}{2x'^4} \right) \\ x' &= x + d \end{aligned} \right\} \cdots (6)$$

円孔とき裂が離れている $2a/d$ が小さい 0.1 の場合，応力分布はほぼ一様で円孔の影響がない。円孔とき裂が近い $2a/d$=0.8 では応力分布の変化が大きくなっているが，最小二乗法による式(3)の応力分布が良い近似を示していることがわかる。そして，き裂先端 A および B の応力拡大係数の修正係数は式(4)，(5)を用いて算出でき，図 5 に既知の精度良い結果[3]と比較して示す。き裂先端 A および B における応力拡大係数は $2a/d$ が大きくなる，すなわちき裂が円孔に近づくと誤差が増加するが，$2a/d$=0.6 以下では十分な結果を与えることがわかる。相互干渉効果を考慮した結果[3]と比較すると $2a/d$=0.6 では，き裂先端 A で誤差 0.4%，き裂先端 B で誤差 1%である。$2a/d$=0.6 以上では，図 3 に示す重ね合わせによる切欠き縁自由の条件が不完全な影響がでて誤差が大きくなるようである。

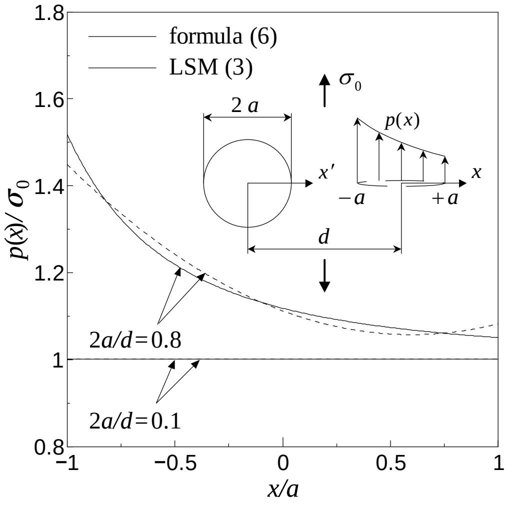


図 4　円孔の応力分布

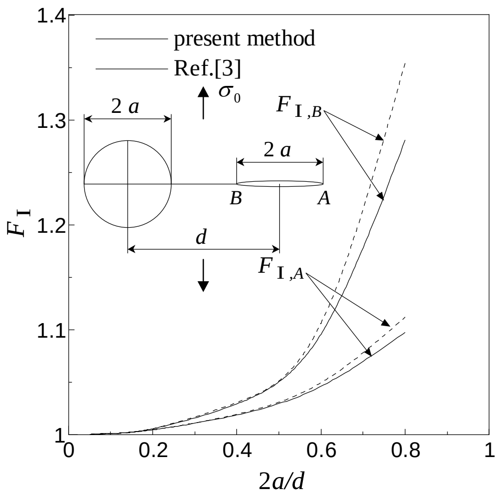


図 5　円孔近傍のき裂の修正係数

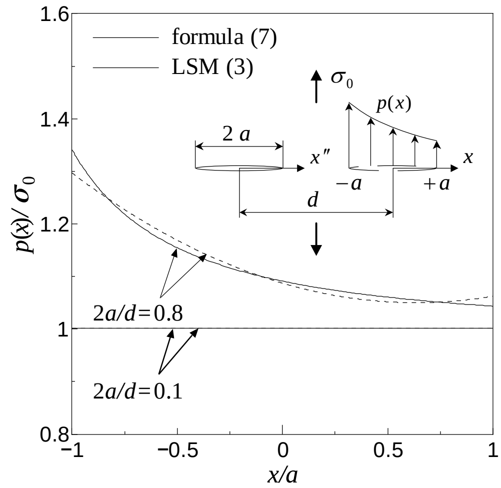


図 6　き裂の応力分布

図 6，7 に近接する 2 き裂問題の結果を示す。2 き裂ともき裂長さを 2a，き裂の中心間距離を d とし，き裂長さと中心間距離の比 2a/d を種々変化させて数値計算を行った。図 6 には 1 個のき裂による他のき裂相当位置の応力分布 $p(x)$と，式(3)によるその最小二乗近似を示す。なお，き裂問題のき裂相当位置の応力分布 $p(x'')$は次式で得られる[1]。

$$\left.\begin{aligned} p(x'') &= \frac{\sigma_0 x''}{\sqrt{x''^2 - a^2}} \\ x'' &= x + d \end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

図 4 に示す円孔近傍のき裂問題と同様，2a/d=0.1 ではき裂の影響がなくほぼ一様応力となり，2a/d=0.8 の応力変化が大きい場合とともに式(3)で良い近似が得られている。したがって最小二乗近似した応力分布を用いてき裂先端の応力拡大係数を計算しても応力分布による影響は小さい。図 7 にき裂先端 A および B の応力拡大係数の修正係数を式(4), (5)より算出して示す。また，石田[1]による近似式(8)を用いた結果もあわせて示す。

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I},A} &= \sigma_0\sqrt{\pi a}(1-0.0426\lambda+0.5461\lambda^2-1.1654\lambda^3+1.2368\lambda^4) \\ K_{\mathrm{I},B} &= \sigma_0\sqrt{\pi a}(1-0.0037\lambda+0.1613\lambda^2-0.1628\lambda^3+0.1560\lambda^4) \\ \lambda &= \frac{2a}{d} \end{aligned}\right\} \cdots (8)$$

2 個のき裂が近づくと誤差が大きくなるが，これは図 3 に示す重ね合わせによる片方のき裂縁自由の条件が不完全なことによる。しかし，2a/d=0.6 以下では十分な精度で得られており，式(8)と比較すると 2a/d=0.6 の場合，き裂先端 A で誤差 0.2%，き裂先端 B で誤差 0.5%程度である。円孔近傍のき裂問題と比べ誤差が小さいのは，同じ 2a/d でもき裂相当位置の応力分布の大きさが 2 き裂問題では小さく，相互干渉の影響が小さくなるためと考えられる。

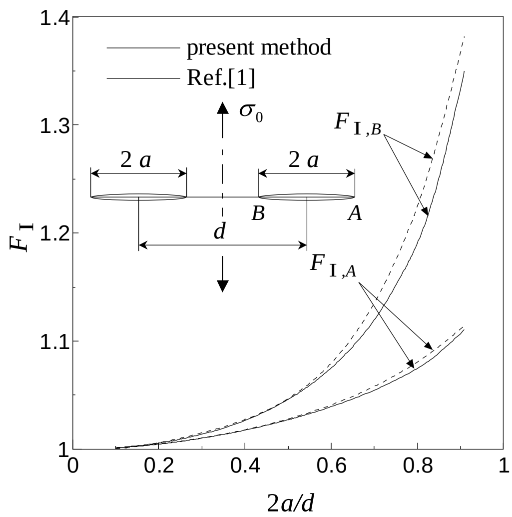


図 7　近接する 2 個のき裂の修正係数

図 8，9 に 2 個の円孔に挟まれるき裂問題の結果を示す。き裂長さを 2a，円孔の半径を r，き裂と円孔の中心間距離を d とし，き裂半長と中心間距離の比 a/d，円孔の半径と中心間距離の比 r/d を種々変化させ数値計算を行った。図 8 に 2 円孔問題のき裂相当位置の応力分布 $p(x)$と式(3)によるその最小二乗近似の例を示す。なお，き裂相当位置の応力分布 $p(x)$は FEM ソフトにより数値解析した。r/d=0.4 とし a/d=0.1(r/a=4)では円孔の影響が小さくなりほぼ応力一定となり，a/d=0.5(r/a=0.8)では応力変化が大きくなるが，式(3)の 2 次式で十分表せることがわかる。図 9 はき裂先端の応力拡大係数の修正係数を式(4), (5)を用いて算出し，精度良い結果[1]と比較して示す。縦軸にき裂先端の応力拡大係数の修正係数 F_{I}，横軸にき裂半長と中心間距離の比 a/d，パラメータを円

孔の半径と中心間距離の比 r/d として示す。a/d および r/d が大きくなる，すなわちき裂先端が 2 円孔に近接してくると誤差が大きくなることがわかる。精度良い結果と比較して，r/d が 0.4 以下でかつ a/d が 0.3 以下であれば十分な精度で得られる。

なお, 数値解析は図 10(a)に示す対称性を考慮した 1/4 の形状で解析を行い，有限要素法解析ソフトであるプリ・ポストプロセッサ(MSC.Patran), ソルバー(MD.Nastran)を用いた。材料特性は縦弾性係数 E=206×10^3 [N/mm^2]，ポアソン比 ν=0.3 を用い，き裂半長と板幅の比 a/W は有限幅の影響を無視できるように 0.05 とした。同図(b)に解析に用いた要素分割例を示す。

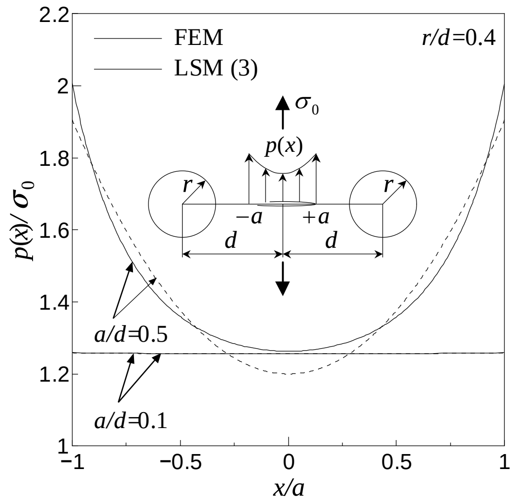


図 8　2 円孔に挟まれるき裂相当位置の応力分布

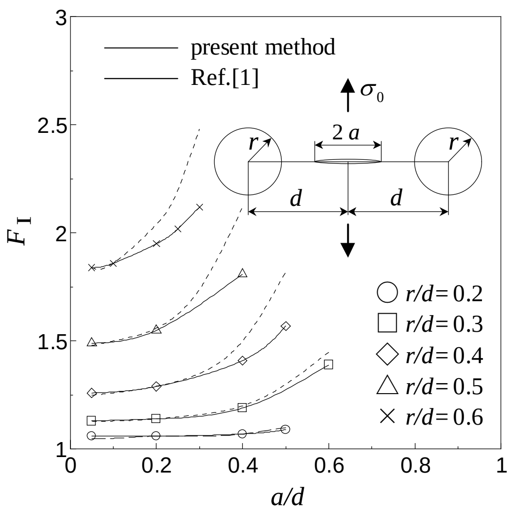
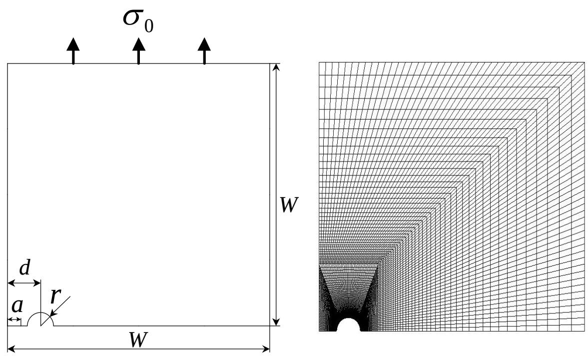


図 9　2 円孔に挟まれるき裂の修正係数



(a)　解析領域　　(b)　要素分割例(a/d=0.4, r/d=0.4)

図 10　2 円孔に挟まれるき裂の応力場の解析形状

次に一様引張りを受ける片側半円切欠きとき裂問題を解析し，結果を図 11，12 に示す。き裂長さを $2a$，半円切欠き半径を r，き裂と切欠きの中心間距離を d とし，き裂長さと中心間距離の比 $2a/d$，および半円切欠き半径とき裂長さの比 $r/2a$ を種々変化させ数値計算を行った。図 11 に片側半円切欠きによるき裂相当位置の応力分布 $p(x)$と式(3)によるその最小二乗近似の例を示す。$2a/d$=0.2 では切欠きの影響がほぼなくなり，$2a/d$=0.8 では応力変化が大きくなるが式(3)の 2 次式で近似できることがわかる。図 12 にき裂先端 A および B の応力拡大係数の修正係数を示す。縦軸に応力拡大係数の修正係数 F_{I}，横軸にき裂長さと中心間距離の比 $2a/d$，パラメータを切欠き半径とき裂長さの比 $r/2a$ として示す。$2a/d$ が大きい，すなわち半円切欠きにき裂が近接してくると，き裂先端の応力場は厳しくなり，特に切欠き半径に対してき裂が小さいと，き裂の両先端の応力拡大係数の修正係数は近い値で急激に大きくなる。また，$2a/d \to 0$ では切欠き縁の影響を受けず F_{I}=1 となるが，図 12 の結果もその傾向を示している。ここで，前述の円孔近傍のき裂問題と比較する。図 4 と図 11 の $2a/d$=0.8 の結果(r=a)は直線縁があるかないかの違いを示しており応力分布に 6%の差異がある。その結果, 図 12 の $r/2a$=0.5 の場合と図 5 の結果にその差がでて半円切欠きの場合が同程度大きくなったと思われる。なお，応力集中係数に着目すると，無限板中の円孔では 3, 半無限板の半円切欠きでは 3.065 であり，その差は 2%にすぎない。

また, き裂相当位置の応力分布 $p(x)$は FEM ソフトにより数値解析を行った。数値解析は図 13(a)に示す対称性を考慮した 1/2 の形状で解析を行い，切欠き半径と板幅の比 r/W は有限幅の影響を無視できるように 0.05 とした。同図(b)に解析に用いた要素分割例を示す。

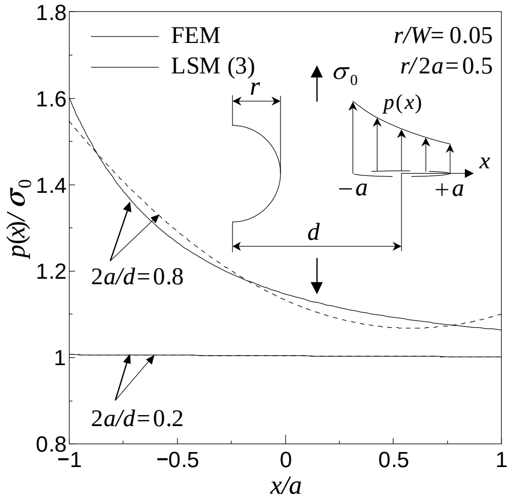


図 11　片側半円切欠きの応力分布

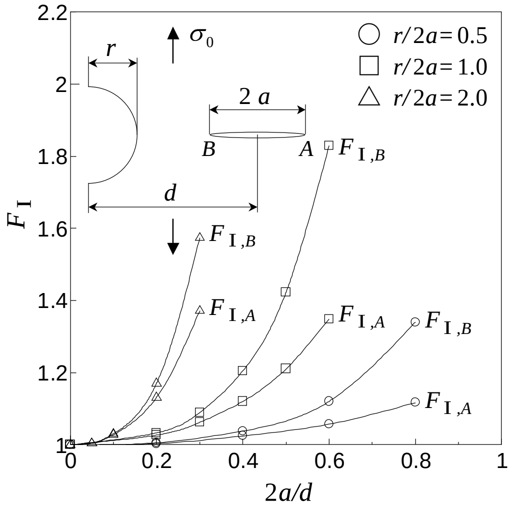
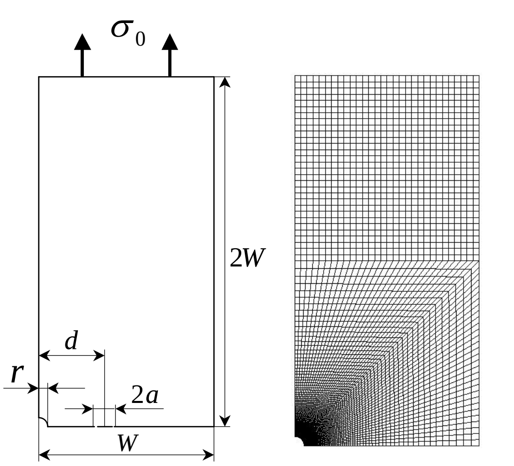


図 12　片側半円切欠き近傍のき裂の修正係数

図 14，15 に一様引張りを受ける正方形切欠き近傍のき裂の解析結果を示す。き裂長さを 2*a*，正方形切欠きの一辺の長さを *h*，き裂中心と直線縁の距離を *d* とし，き裂長さとの比 2*a*/*d*，切欠きの長さとき裂長さの比 *h*/2*a* を種々変化させ数値計算を行った。図 14 に正方形切欠きによるき裂相当位置の応力分布 *p*(*x*)とその最小二乗近似を示す。2*a*/*d*=0.2 では切欠き効果が小さく，2*a*/*d*=0.8 では応力変化が大きくなるが，式(3)の最小二乗近似が可能であることがわかる。図 15 にき裂先端 *A* および *B* の応力拡大係数の修正係数を示す。縦軸に応力拡大係数の修正係数 F_{I}，横軸にき裂長さと直線縁からの距離の比 2*a*/*d*，パラメータを切欠きの一辺の長さとき裂長さの比 *h*/2*a* として示している。図 12 の片側半円切欠き近傍のき裂問題と傾向が一致しており，計算した範囲で正方形切欠き近傍のき裂の場合が最大で 6%大きな値となる。これは，図 11 と図 14 の応力分布の比較から理解できる。そして，2*a*/*d* が小さい場合，前述の検証より精度良い結果が得られていると思われる。なお，図 16 に片側半円切欠き縁と正方形切欠き縁の応力分布を示す。縦軸に切欠き縁の応力 σ_θ を外力 σ_0 で除した σ_θ/σ_0，横軸に切欠き中央からの角 θ を用いて示した。正方形切欠きは点 *A* で応力が特異性をもつが，その影響は局所的で切欠き底の応力分布に大きな影響を及ぼさないと考えられる。また，切欠き縁およびき裂相当位置の応力分布 *p*(*x*)は FEM ソフトにより数値解析を行った。数値解析は図 17(a)に示す対称性を考慮した 1/2 の形状で解析を行い，正方形切欠きの一辺の長さと板幅の比 *h*/*W* は有限幅の影響を無視できるように 0.05 とした。同図(b)に解析に用いた要素分割例を示す。



(a)　解析領域　　(b)　要素分割例(*r*/*W*=0.05)

図 13　片側半円切欠き近傍の応力場の解析形状

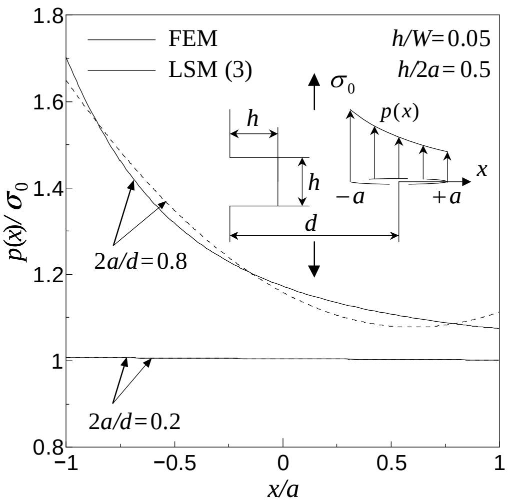


図 14　片側正方形切欠きの応力分布

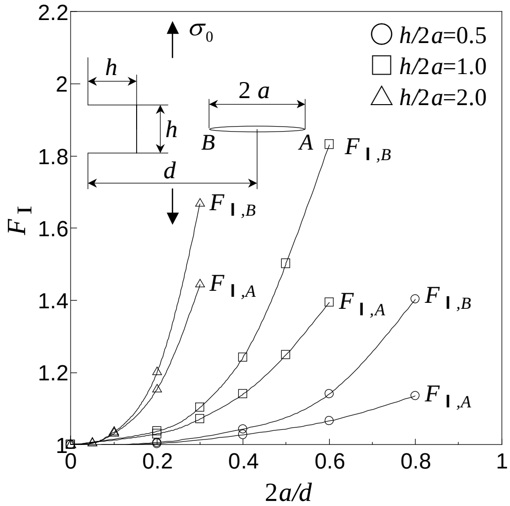


図 15　片側正方形切欠き近傍のき裂の修正係数

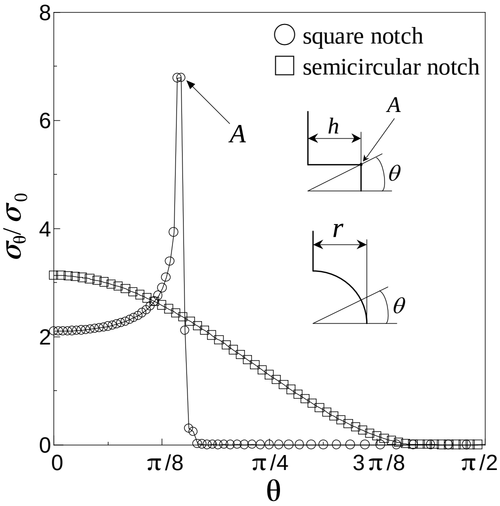
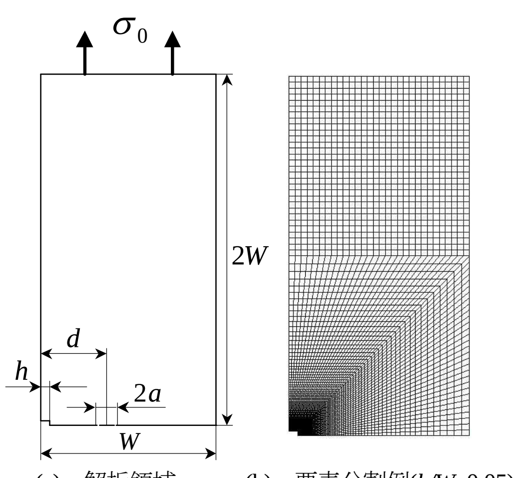


図 16　切欠き縁の応力分布



(a)　解析領域　　(b)　要素分割例(h/W=0.05)

図 17　片側正方形切欠きの応力場の解析形状

4．結　言

切欠き近傍のき裂の応力拡大係数の簡便な解法を提案し，精度と適用範囲を検討するため 1 円孔とき裂，2 円孔とき裂，2 き裂問題を解析し，片側半円切欠きとき裂，片側正方形切欠きとき裂などの新しい問題を解析して図にまとめた。得られた結果は以下のとおりである。

- 円孔近傍のき裂問題において，相互干渉効果を考慮した結果と比較すると $2a/d$=0.6 では，き裂先端 A で誤差 0.4%，き裂先端 B で誤差 1%である。
- 近接するき裂問題においては，$2a/d$=0.6 の場合，き裂先端 A で誤差 0.2%, き裂先端 B で誤差 0.5%程度である。円孔近傍のき裂問題と比べ誤差が小さいのは，同じ $2a/d$ でもき裂相当位置の応力分布の大きさが 2 き裂問題では小さく，相互干渉の影響が小さくなるためと考えられる。
- 2 個の円孔に挟まれるき裂問題は, き裂先端が 2 円孔に近接してくると誤差が大きくなることがわかる。精度良い結果と比較して，r/d=0.4 以下でかつ a/d=0.3 以下であれば十分な精度で得られる。
- 片側半円切欠きとき裂問題においては，半円切欠きにき裂が近接してくると，き裂先端の応力場は厳しくなり，特に切欠き半径に対してき裂が小さいと，き裂の両先端の応力拡大係数の修正係数は近い値で急激に大きくなる。
- 片側正方形切欠きとき裂問題においては，片側半円切欠き近傍のき裂問題と傾向が一致しており，計算した範囲で正方形切欠き近傍のき裂の場合が最大で 6%大きな値となる。
- 一般的に切欠きとき裂の中心間距離に対するき裂長さ $2a/d$ が小さい場合，精度良い結果が得られていると思われる。

参考文献

[1]　石田 : き裂の弾性解析と応力拡大係数（1976），培風館.

[2]　矢川：破壊力学（1988），培風館.

[3]　Isida，M.，Engng．Fract．Mech.，2-1（1970-3），61.

[4]　S．P．Timoshenko and J．N．Goodier : Theory of Elasticity，3rd ed.，（1970），McGraw-Hill Int. Book.