

デカルト座標系からバイポーラ座標系への推移

ダワァ ガンバット *

Transition From the Cartesian Coordinate System to the Bipolar Coordinate System

Ganbat DAVAA *

Abstract

One of the ways we recognize the physical matters around us during our daily life is to simply notice their existence by perceiving their size and location. In order to describe or model the size and location of matters, coordinate systems are widely used. Among the many coordinate systems such as cylindrical, spherical, polar, generalized and oblique coordinate systems, the most commonly applied coordinate system is the Cartesian or rectangular coordinate system. It is because the size and location of matters can usually be noted by 3 dimensions which are mutually perpendicular. However depending on the need or the configuration of the matters, the other coordinate systems may be more suitable than the Cartesian coordinate system to describe the size and locations. Therefore transitions between the coordinate systems are widely applied in practice. The present paper deals with a method of the coordinate transition from the Cartesian system to the bipolar system that is extensively used in research works related with material processing, fluid flow, heat transfer, transistors and conductors.

Keywords: Bipolar coordinate system, Transition method between coordinate systems

キーワード：バイポーラ座標系，座標系間の推移方法

1. 緒言

人間は物体を認識する場合まず頭の中で3次元をイメージし、それが何であるかを理解する。そのイメージに必要なものは座標系である。我々が広く利用している座標系は直交座標系である。しかし、直交座標系以外に斜交座標系、極座標系、一般化座標系、球座標系、円筒座標系、バイポーラ座標系など様々な座標系があり応用分野によって使い分けられている。

本稿では材料や熱流体、トランジスタやコンダクタに関する研究などに良く利用されている直交座標系からバイポーラ座標系への変換方法について紹介する。

2. 座標系

座標 (coordinate) とは、点の位置を明確にするために与えられる数の組のことである。座標と座

標系が与えられれば、点は一つに定まる。原点や座標軸などを定めれば、任意の座標は、ただ一つの点を指し示す。このように定めれば座標が作れるシステムのことを座標系 (system of coordinates) と呼ぶ。座標系の種類としては：直交座標系、斜交座標系、極座標系、一般化座標系、球座標系、円筒座標系などがある。

数学における直交座標系 (rectangular coordinate system) とは、互いに直交している座標軸を指定することによって定まる座標系のことである。平面上の直交座標系ではそれぞれの点に対して一意に定まる2つの実数の組によって点の位置が指定される。同様に空間上の直交座標系では3つの実数の組によって座標が与えられる。座標の概念を確立したルネ・デカルトの名を採ってデカルト座標系 (Cartesian coordinate system) とも呼ぶ。

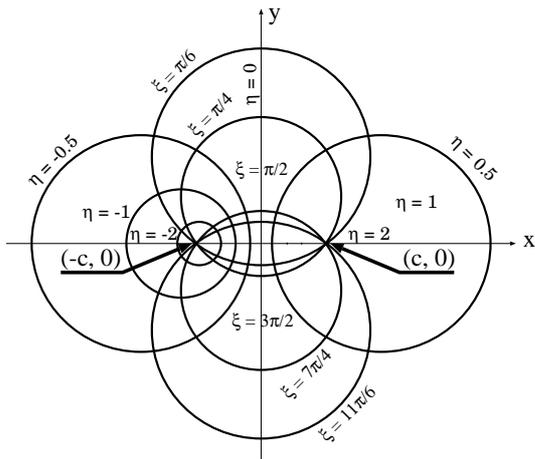


図 1. 一般バイポーラ座標系

図 1 にバイポーラ座標系を示す^[1]。バイポーラの座標は $(\pm c, 0)$ に対する Apollonios^[2] の円とも呼ばれる。2 つの焦点 $(-c, 0)$ と $(c, 0)$ はデカルト座標系の X 軸の上で存在する。

3. 座標系の式変換

バイポーラ座標系で偏心率は 2 つ座標 (η, ξ) によって表される。今回は、バイポーラ座標から直交座標への式変換を行い、デカルト座標系の X 軸上の整数部分での (図 1 の右側) 偏心率について考え、後変換した式を使いプログラムを作成した。これから議論する部分を図 2 に示す。e は偏心率 (内管と外管の中心のずれ)、 η は一定、 ξ は $(0 \leq \xi < 2\pi)$ で表されている。作成したプログラムに、条件として偏心率と半径比を与え、シミュレーションし、その結果を解析した。

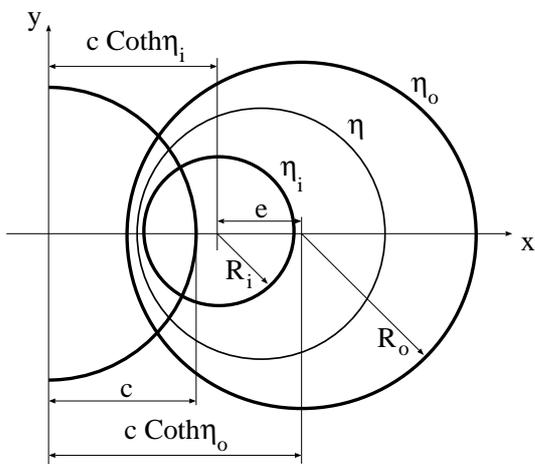


図 2. バイポーラ座標系

直交座標系 (x, y) とバイポーラ座標系 (ξ, η) の間の変換は次式で与えられる。

$$x + iy = ic \cot \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right) \quad (1)$$

式 (1) の右辺の部分 $\cot(\quad)$ を変換すると^[3]

$$\begin{aligned} \cot \left(\frac{\xi}{2} + i \frac{\eta}{2} \right) &= \frac{\sin \xi - i \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \\ &= \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} - i \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \end{aligned} \quad (2)$$

なり、また式 (2) に ic を掛けると、

$$\begin{aligned} ic \cot \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right) &= \frac{c \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} + i \frac{c \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \end{aligned} \quad (3)$$

になるので、式 (1) から直交座標系とバイポーラ座標系間の変換に関して次の関係式を得る。

$$\begin{cases} x = \frac{c \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \\ y = \frac{c \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \end{cases} \quad (4)$$

式 (1) を以下のように変換し、

$$\cot \left(\frac{\xi + i\eta}{2} \right) = \frac{x + iy}{ic} \quad (5)$$

式 (5) に以下式 (6) と式 (7) を使い、整理すると式 (8) になる。

$$\coth^{-1}(ix) = -i \cot^{-1}x \quad (6)$$

$$\coth^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad x > 1 \text{ or } x < -1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi + i\eta}{2} &= \coth^{-1} \left(\frac{x + iy}{ic} \right) \\ &= \frac{i}{2} \ln \left[\frac{\frac{x+iy}{c} + 1}{\frac{x+iy}{c} - 1} \right] = \frac{i}{2} \ln \left[\frac{(x+c) + iy}{(x-c) + iy} \right] \\ &= \frac{i}{2} \{ \ln [(x+c) + iy] - \ln [(x-c) + iy] \} \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} \ln \sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

(付録 (1) 参照)

式 (8) の両辺に 2 を掛けると

$$\begin{aligned} \xi + i\eta &= \tan^{-1} \left(\frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} \right) \\ &\quad + i \ln \sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

形になり, 式 (9) からバイポーラ座標系と直行座標系の間の変換に関して次の関係式を得る。

$$\begin{cases} \xi = \tan^{-1} \left(\frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} \right) \\ \eta = \ln \sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}} \end{cases} \quad (10)$$

式 (10) からバイポーラ座標系の座標 ξ と直行座標系の座標関係式をもう一度書く。

$$\xi = \tan^{-1} \left(\frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} \right) \quad (11)$$

式 (11) を以下のように変換すると式 (12) になる。

$$\tan \xi = \frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} \quad (\text{付録 (2) 参照})$$

$$\cot \xi = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2cy}$$

$$x^2 + y^2 - 2cy \cot \xi = c^2$$

上式の左辺に $(c^2 \cot^2 \xi - c^2 \cot^2 \xi)$ を足すと

$$x^2 + y^2 - 2cy \cot \xi + c^2 \cot^2 \xi - c^2 \cot^2 \xi = c^2$$

$$x^2 + (y - c \cot \xi)^2 = c^2 + c^2 \cot^2 \xi$$

$$x^2 + (y - c \cot \xi)^2 = c^2(1 + \cot^2 \xi) = \left(\frac{c}{\sin \xi} \right)^2$$

$$x^2 + (y - c \cot \xi)^2 = \left(\frac{c}{\sin \xi} \right)^2 \quad (12)$$

式 (10) からバイポーラ座標系の座標 η と直行座標系の座標関係式をもう一度書く。

$$\eta = \ln \sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}} \quad (13)$$

式 (13) を以下のように変換すると式 (14) になる。

$$\eta = \ln \sqrt{\frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}$$

$$e^{2\eta} = \frac{(x+c)^2 + y^2}{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = e^{2\eta} [(x-c)^2 + y^2]$$

(付録 (3) 参照)

上の式の $e^{2\eta}$ は

$$e^{2\eta} = \cosh 2\eta + \sinh 2\eta = \frac{\cosh \eta + \sinh \eta}{\cosh \eta - \sinh \eta}$$

この式を上式の式に代入すると

$$(x+c)^2 + y^2 = \frac{\cosh \eta + \sinh \eta}{\cosh \eta - \sinh \eta} [(x-c)^2 + y^2]$$

この式に $(\cosh \eta - \sinh \eta)$ を掛けて整理すると

$$2(x^2 + c^2 + y^2) \sinh \eta - 4xc \cosh \eta = 0$$

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2xc \coth \eta = 0$$

上の式に $(c^2 \coth^2 \xi - c^2 \coth^2 \xi)$ と入れると

$$x^2 - 2xc \coth \eta + c^2 \coth^2 \eta - c^2 \coth^2 \eta + c^2 + y^2 = 0$$

$$(x - c \coth \eta)^2 + y^2 = c^2 (\coth^2 \eta - 1) = \left(\frac{c}{\sinh \eta} \right)^2$$

$$(x - c \coth \eta)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{\sinh \eta} \right)^2 \quad (14)$$

図の中で観察された幾何学的な考察から, 次の関係 (式 15 から式 18) を得た。

$$c = R_i \sinh \eta_i = R_o \sinh \eta_o \quad (15)$$

$$c(\coth \eta_o - \coth \eta_i) = \varepsilon (1 - \alpha) R_o \quad (16)$$

$$\varepsilon \equiv e/(R_o - R_i) \quad (0 \leq \varepsilon < 1) \quad (17)$$

$$\alpha = R_i/R_o \quad (0 < \alpha \leq 1) \quad (18)$$

$c/R_o \equiv S$ とすると式 (15) から以下の関係式を書くことができる。

$$\begin{cases} \sinh \eta_i = \frac{S}{\alpha} \\ \sinh \eta_o = S \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \eta_i = \ln \left\{ \frac{S}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{S}{\alpha} \right)^2 + 1} \right\} \\ \eta_o = \ln \{ S + \sqrt{S^2 + 1} \} \end{cases} \quad (20)$$

(付録 (4) 参照) 式 (29) を式 (24) に代入すると

$$\begin{cases} \cosh \eta_i = \sqrt{\left(\frac{S}{\alpha}\right)^2 + 1} \\ \cosh \eta_o = \sqrt{S^2 + 1} \end{cases} \quad (21)$$

$$\sqrt{(1-\alpha^2) + \alpha^2 \cosh^2 \eta_i} - \alpha \cosh \eta_i = \varepsilon (1-\alpha) \quad (30)$$

(付録 (5) 参照)

式 (18) を使って式 (15) を変換すると

$$\alpha \sinh \eta_i = \sinh \eta_o \quad (22)$$

式 (16) の c に ($c = R_o \sinh \eta_o$) を代入すると

$$\begin{aligned} R_o \sinh \eta_o \left(\frac{\cosh \eta_o}{\sinh \eta_o} - \frac{\cosh \eta_i}{\sinh \eta_i} \right) \\ = \varepsilon (1-\alpha) R_o \end{aligned} \quad (23)$$

式 (22) を使って式 (23) を変換すると

$$\sinh \eta_o \frac{\cosh \eta_o}{\sinh \eta_o} - \alpha \sinh \eta_i \frac{\cosh \eta_i}{\sinh \eta_i} = \varepsilon (1-\alpha)$$

$$\cosh \eta_o - \alpha \cosh \eta_i = \varepsilon (1-\alpha) \quad (24)$$

式 (21) の $\cosh \eta_i$ に式 (19) の $\sinh \eta_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} \cosh \eta_i &= \sqrt{\left(\frac{S}{\alpha}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \sinh^2 \eta_i} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\sinh^2 \eta_o}{\alpha^2}} = \frac{\sqrt{(\alpha^2 - 1) + \cosh^2 \eta_o}}{\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

(付録 (5) 参照)

この式を式 (24) に代入し, 変換すると

$$\cosh \eta_o - \varepsilon (1-\alpha) = \sqrt{(\alpha^2 - 1) + \cosh^2 \eta_o} \quad (26)$$

式 (26) を $\cosh \eta_o$ について解くと

$$\cosh \eta_o = \frac{(1+\alpha) + \varepsilon^2(1-\alpha)}{2\varepsilon} \quad (27)$$

式 (27) を式 (21) に代入すると

$$1 + S^2 = \left[\frac{(1+\alpha) + \varepsilon^2(1-\alpha)}{2\varepsilon} \right]^2 \quad (28)$$

になる。

式 (21) の $\cosh \eta_o$ に式 (19) の $\sinh \eta_o$ を代入すると

$$\begin{aligned} \cosh \eta_o &= \sqrt{S^2 + 1} = \sqrt{1 + \sinh^2 \eta_o} \\ &= \sqrt{1 + \alpha^2 \sinh^2 \eta_i} = \sqrt{1 - \alpha^2 + \alpha^2 \cosh^2 \eta_i} \end{aligned} \quad (29)$$

$$(1-\alpha^2) + \alpha^2 \cosh^2 \eta_i = [\varepsilon (1-\alpha) + \alpha \cosh \eta_i]^2 \quad (31)$$

式 (31) を $\cosh \eta_i$ について解くと

$$\cosh \eta_i = \frac{(1+\alpha) - \varepsilon^2(1-\alpha)}{2\alpha\varepsilon} \quad (32)$$

$$1 + \left(\frac{S}{\alpha}\right)^2 = \left[\frac{(1+\alpha) - \varepsilon^2(1-\alpha)}{2\alpha\varepsilon} \right]^2 \quad (33)$$

式 (16) から c と R_o の比について解くと

$$\begin{aligned} \frac{c}{R_o} &= \frac{\varepsilon(1-\alpha)}{\coth \eta_o - \coth \eta_i} \\ &= \frac{\alpha \varepsilon (1-\alpha) \sinh \eta_i}{\cosh \eta_o - \alpha \cosh \eta_i} \end{aligned} \quad (34)$$

式 (34) に式 (24) を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{c}{R_o} &= \alpha \sinh \eta_i = \alpha \sqrt{\cosh^2 \eta_i - 1} \\ &= \alpha \sqrt{\left[\frac{(1+\alpha) - \varepsilon^2(1-\alpha)}{2\alpha\varepsilon} \right]^2 - 1} \end{aligned} \quad (35)$$

式 (34) を整理すると最後に以下の形になる。

$$\frac{c}{R_o} = \frac{1+\alpha}{2\varepsilon} \sqrt{(1-\varepsilon^2) \left\{ 1 - \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^2 \varepsilon^2 \right\}} \quad (36)$$

4. 計算結果

プログラムに2つの初期値として偏心率 (ε), 半径比 (α) を与えて, それらの初期値をもとにし, シミュレーションした結果をグラフとして描いた。 ε と α を与え $e = \varepsilon(R_o - R_i)$ より, 偏心率 e を求める。計算結果を以下に示す。

半径比 $\alpha = 0.3$ として偏心率 ε を変えて計算を行った。結果を例として, 図 3~5 に $\varepsilon = 0.3, 0.5, 0.8$ の場合のグラフを示す。

半径比 $\alpha = 0.5$ として偏心率 ε を変えて計算を行った。結果を例として, 図 6~8 に $\varepsilon = 0.3, 0.5, 0.8$ の場合のグラフを示す。

半径比 $\alpha = 0.8$ として偏心率 ε を変えて計算を行った。

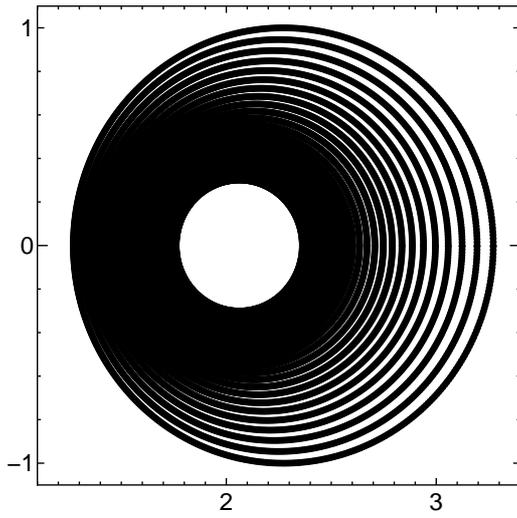


図 3 . $\alpha = 0.3, \varepsilon = 0.3$

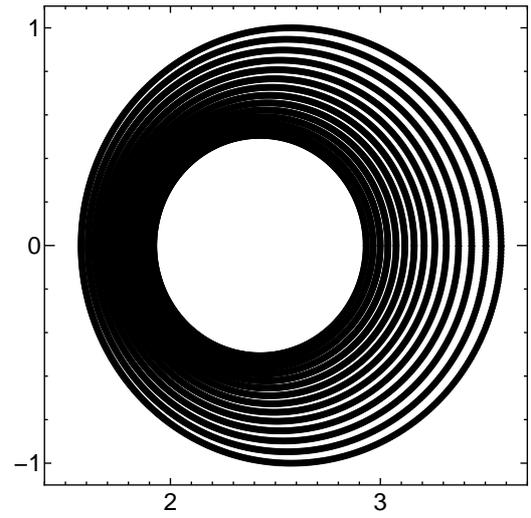


図 6 . $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.3$

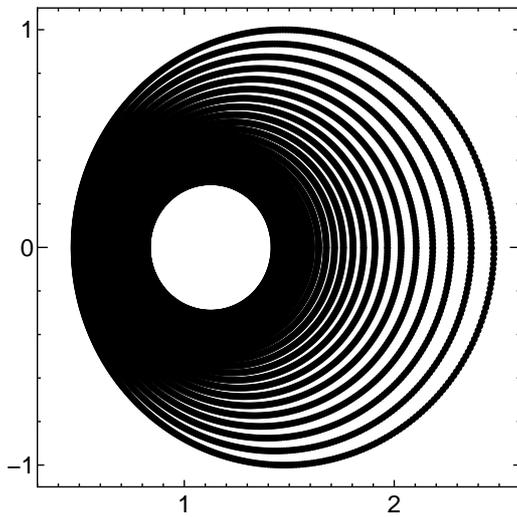


図 4 . $\alpha = 0.3, \varepsilon = 0.5$

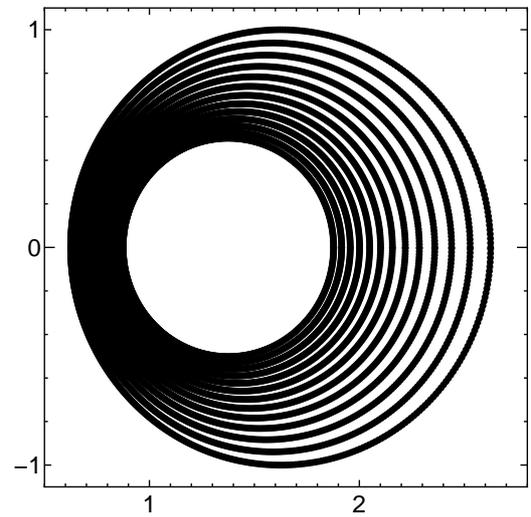


図 7 . $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.5$

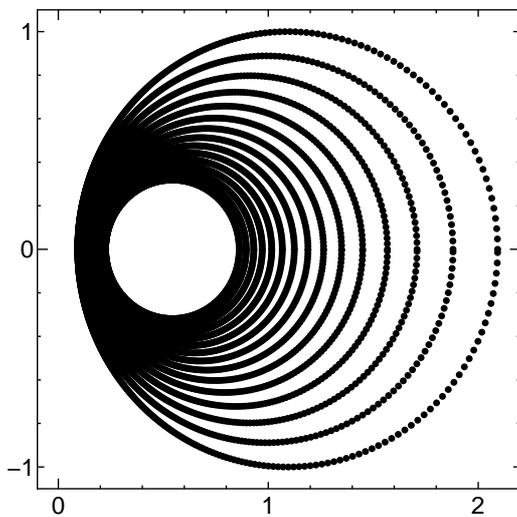


図 5 . $\alpha = 0.3, \varepsilon = 0.8$

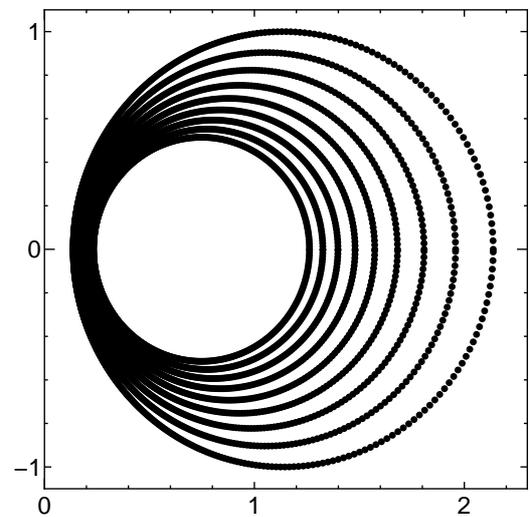


図 8 . $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.8$

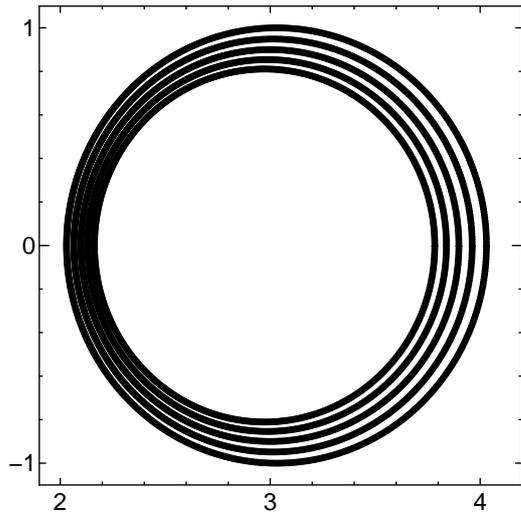


図 9 . $\alpha = 0.8, \varepsilon = 0.3$

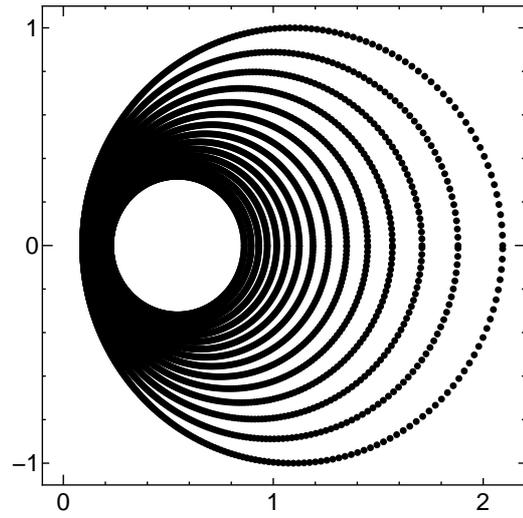


図 12 . $\alpha = 0.3, \varepsilon = 0.8$

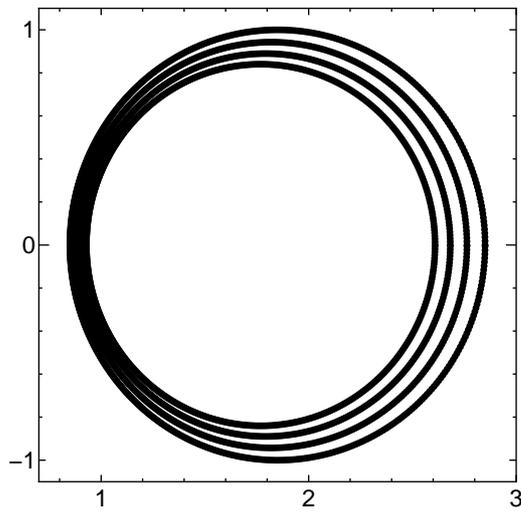


図 10 . $\alpha = 0.8, \varepsilon = 0.5$

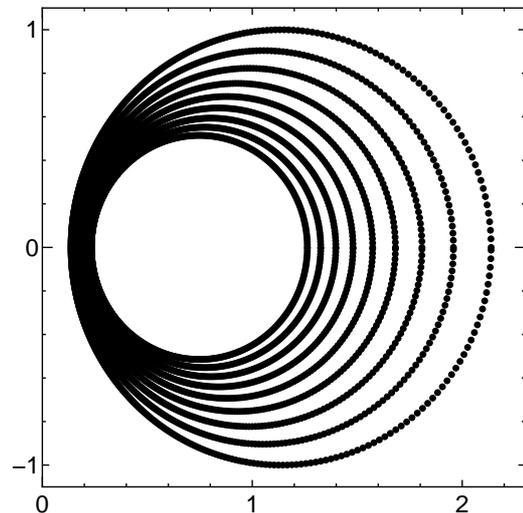


図 13 . $\alpha = 0.5, \varepsilon = 0.8$

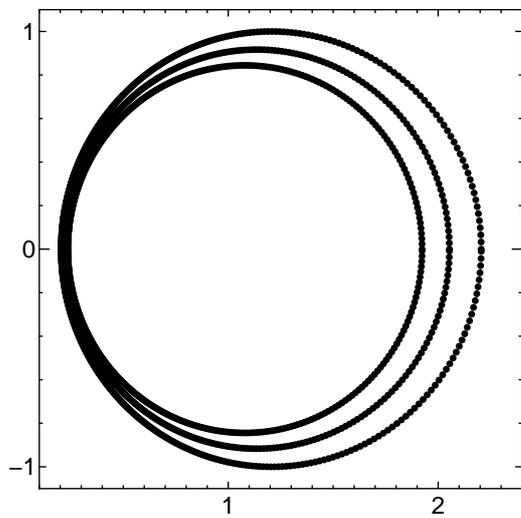


図 11 . $\alpha = 0.8, \varepsilon = 0.8$

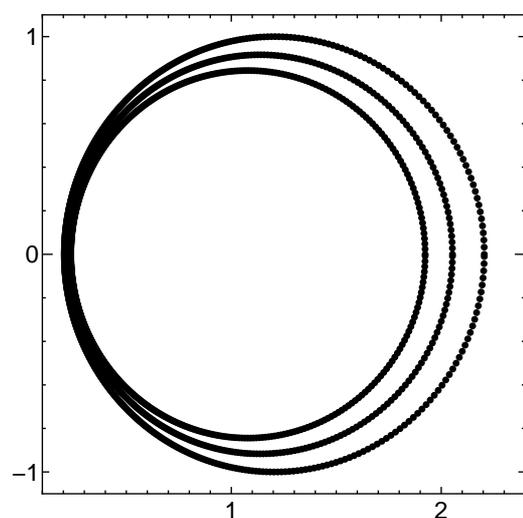


図 14 . $\alpha = 0.8, \varepsilon = 0.8$

結果を例として, 図 9~11 に $\varepsilon = 0.3, 0.5, 0.8$ の場合のグラフを示す。

図 12~14 は, 偏心率 $\varepsilon = 0.8$, 半径比 $\alpha = 0.3, 0.5, 0.8$ のときのグラフである。

5. 結 言

材料や熱流体に関する研究では, 特に偏心環状流路内の解析にバイポーラ座標が一般的に使われている。そのためバイポーラ座標から直交座標に式変換をするために数学的解析を行った。そして, 変換した式からプログラムを作成した。次に, 作成したプログラムに初期条件として偏心率と外管と内管の半径比を与えてシミュレーションを行った。そしてそのシミュレーションによって計算された数値を使い偏心環状流路の図を平面上に表示させた。

今後の目標については, 今回の研究により行った数学的解析を更に深く理解すると共に, 求めた結果を偏心環状流路内の流体と伝熱数値解析に応用できるように今後発展させていきたい。

参考文献

- [1] Murray R. Spiegel and John Liu, Mathematical handbook of formulas and tables, *Schaum's Outline Series, McGRAW-HILL* pp.8, 41, 53, 56, 58, 128-129 (1999)
- [2] 森口繁一・宇田川 久・一松信 共著, 数学公式 I, 岩波書店 pp.26-27 (1992-3)
- [3] 森口繁一・宇田川 久・一松信 共著, 数学公式 II, 岩波書店 pp.205, 220, 221 (1992-3)
- [4] T.L.Guckes, "Laminar flow of non-Newtonian fluids in an eccentric annulus", *Transactions of the ASME*, pp.498-499 (1975-5)
- [5] J.F.Heyda, "A Green's function solution for the case of laminar incompressible flow between non-concentric circular cylinders", *Journal of Franklin Institute*, Vol.267, pp.25-28 (1959)
- [6] L.M.Milne-Thomson, "Coaxial coordinates", *Theoretical hydrodynamics, 5th edition M*, pp.176-177 (1968)

付 録

$$\begin{aligned} \text{Coth}^{-1}(ix) &= -i\text{Cot}^{-1}x \\ \text{Coth}^{-1}x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

$$x > 1 \quad \text{or} \quad x < -1$$

(参考文献 [1] を参照)

$$\begin{aligned} \tan x = a & \quad x = \tan^{-1}a + \pi k \\ \cot A &= \frac{1}{\tan A} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

(参考文献 [1] を参照)

$$\begin{aligned} e^{\pm x} &= \cosh x \pm \sinh x \\ &= \frac{\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \pm \sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2}\right) \mp \sinh\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 \pm \tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1 \mp \tanh\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

(参考文献 [3] を参照)

$$\begin{aligned} x = \sinh y & \quad \Rightarrow \quad y = \sinh^{-1} x \\ \sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

(参考文献 [1] を参照)

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \sinh^2 x &= \cosh^2 x - 1 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

(参考文献 [1] を参照)