finite topology の basis について (2)

久保 康幸 ＊

basis for finite topology (2)

Yasuyuki Kubo ＊

Abstract

In this paper, I have proved Proposition 2.4, Theorem 2.5 and Propoaition 2.7, 2.8 in Ernest Michael's "Topologies on spaces of subsets"(1951).

これは、昨年の紀要「finite topology の basis について」の続きであり、「Topologies on spaces of subsets」by Ernest Michael (1951) を読んでいるときのメモである。対比のため、元の論文に番号のついた定義や命題は、それを括弧内に記す。

前回の記号と定義

(X, T) を位相空間とする。

記号１.

$\mathcal{A}(X) = \{E \subset X; E \neq \emptyset\}$,

$2^X = \{E \subset X; E$ は closed, $E \neq \emptyset\} \subset \mathcal{A}(X) = \{E \subset \mathcal{A}; E$ は closed $\}$

記号２.

X の subset の集まり $\{U_i\}_{i\in I}$ に対して、

$$\langle U_i\rangle_{i\in I} = \left\{ E \in 2^X;\ \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{i\in I} U_i, \\ E \cap U_i \neq \emptyset \text{ (for all } i \in I) \end{array} \right\}$$

と書く。

もし $I = \{1, ..., n\}$ なら、$\langle U_i\rangle_{i\in I}$ を $\langle U_1, ..., U_n\rangle$ と表す。

定義.(finite topology, Definition 1.7.)

位相空間 (X, T) について、X の open subsets $U_1, ..., U_n$ で作る $\langle U_1, ..., U_n\rangle$ を集めた open collection によって生成された位相を 2^X 上の finite topology 2^T とする。

0.1 Proposition 2.4. について

記号.

$\mathcal{F}_n(X) = \left\{E \in 2^X; E \text{ の要素は高々 } n \text{ 個}\right\}$

$\mathcal{F}(X) = \left\{E \in 2^X; E \text{ の要素は有限個}\right\}$

$\quad = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n(X)$

定義.(dense)

空間 X の部分集合 D が、X において dense(稠密) とは、$\mathrm{Cl}(D) = X$ となることである。

(注１) $\mathrm{Cl}(D)$ は、$\overline{D}$ と表すこともある閉包 (closure) のことである。

(注２) D が、X において dense(稠密) であることは、空でない任意の開集合 U に対して $U \cap D \neq \emptyset$ となることと同等である。

命題１-１.(Proposition 2.4.1.)

$\mathcal{F}(X)$ は、dense(稠密) in $\left(2^X, 2^T\right)$

証明

2^T の勝手な要素 $U(\neq\emptyset)$ に対し、下の補題 1-1-1 より $\langle U_1, ..., U_n\rangle \subset U$ となる $\langle U_1, ..., U_n\rangle$ を取る。このとき、各 $i = 1, ..., n$ に対し $x_i \in U_i$ となるように x_i を取り、$E = \{x_1, ..., x_n\}$ とすれば、$E \in \langle U_1, ..., U_n\rangle \cap \mathcal{F}(X)$ である。よって、$E \in U \cap \mathcal{F}(X)$ となるから、$U \cap \mathcal{F}(X) \neq\emptyset$である。(証明終)

補題１-１-１.(Proposition 2.1.)

$U_1, ..., U_n$: open in X について、$\langle U_1, ..., U_n\rangle$ を集めた open collection は、2^Xの finite topology 2^T に対して、base となっている。

(注) これは、2009 年の紀要の命題 1 で証明済み。

命題１-２.(Proposition 2.4.2.)

X が Hausdorff 空間の時、すべての $n \geqq 1$ に対し、$\mathcal{F}_n(X)$ が closed in $\left(2^X, 2^T\right)$ である。

この命題は、Hausdorff 空間 (T_2 空間) についての、次の命題を利用して証明する。

補題１-２-１.

Hausdorff 空間 X の異なる n 個 ($n \geqq 2$) の点

＊ 総合教育科

平成 22 年 9 月 16 日受理

$x_1, ..., x_n$ に対し、$x_i \in U_i (i = 1, ..., n)$ となる、互いに素 (pairwise disjoint) な open set $U_1, ..., U_n$ が取れる。
(注) 用語について：
2 個の集合が交わらない (disjoint) ＝ 2 個の集合が互いに素 (mutually disjoint)、
集合の集まりが互いに素 (pairwise disjoint) ＝集まりから任意に取り出した 2 つの集合が互いに素

証明
(1) $n = 2$ の場合：これは Hausdorff 空間の定義である。
(2) $n \geqq 3$ の場合：n 個の点 $x_1, ..., x_n \in X$ から、異なる 2 点 $x_i, x_j (i \neq j)$ を選び、次のように open set $V(i, j)$ を取る。
$V(i, j) \ni x_i, V(j, i) \ni x_j$ かつ $V(i, j) \cap V(j, i) = \emptyset$
このとき、各 $i = 1, ..., n$ に対して $U_i = \bigcap_{j \neq i} V(i, j)$ とすれば、$U_i (i = 1, ..., n)$ が求める open set である。
(証明終)

(注) 上の証明の (2) は、$n = 3$ の場合、次のようになる。
$x_1, x_2, x_3 \in X$ とする。ここから異なる 2 点ずつ選び、次のように open set $V(i, j)$ を取る。
$V(1, 2) \ni x_1, V(2, 1) \ni x_2$
かつ $V(1, 2) \cap V(2, 1) = \emptyset$,
$V(2, 3) \ni x_2, V(3, 2) \ni x_3$
かつ $V(2, 3) \cap V(3, 2) = \emptyset$,
$V(3, 1) \ni x_3, V(1, 3) \ni x_1$
かつ $V(3, 1) \cap V(1, 3) = \emptyset$
このとき、
$U_1 = V(1, 2) \cap V(1, 3)$,
$U_2 = V(2, 1) \cap V(2, 3)$,
$U_3 = V(3, 1) \cap V(3, 2)$
とすれば、$U_i (i = 1, ..., n)$ が求める open set である。

証明 (命題 1-2)
$E \in 2^X$ かつ $E \notin \mathcal{F}_n(X)$ とする。このとき、2^X の open set U で、$U \cap \mathcal{F}_n(X) = \emptyset$ かつ $E \in U$ なるものを次のようにして得る。つまり、$\mathcal{F}_n(X)$ の補集合が open となることを示す。
E の要素は n 個より多いから、$(n + 1)$ 個の点を $x_1, ..., x_{n+1} \in E \subset X$ とする。補題 1-2-1 より、$x_i \in U_i (i = 1, ..., (n + 1))$ となる、互いに素な open set $U_1, ..., U_{n+1}$ が取れる。このとき、$U = \langle U_1, ..., U_{n+1}, X \rangle$ とすれば、この U が求める open set である。$\cdots (*)$
(証明終)
$(*)$ の確認
(1) $U \cap \mathcal{F}_n(X) = \emptyset$ となること：$F \in U$ として、各 $i = 1, ..., n + 1$ に対し $y_i \in F \cap U_i$ である点を取る。$U_1, ..., U_{n+1}$ が互いに素であるから、$\{y_1, ..., y_{n+1}\}$ は $(n + 1)$ 個の異なる点であり、それを含む F は $(n + 1)$ 個以上の要素を持つから、$F \notin \mathcal{F}_n(X)$。
(2) $E \in U$ となること：各 $i = 1, ..., n + 1$ に対し $x_i \in E \cap U_i$ であるから、$E \cap U_i \neq \emptyset$ である。また、$E \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \cup X = X$ である。よって、$E \in \langle U_1, ..., U_{n+1}, X \rangle = U$ となる。
(1), (2) より、この U が求める open set である。
(確認終)

命題 1-3.(Proposition 2.4.3.)
$pr\,(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$ として定義される natural map $pr : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$ は、continuous である。

証明の前に、定義を確認しておく。$\mathcal{F}_n(X)$ は、2^X の部分空間として、finite topology を考える。また、X^n は、n 個の X の積 (= 直積) に積位相 (= 直積位相) を導入して考える。

定義(積位相、product topology)
空間 $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha), \alpha \in A$ に対し、
$\mathcal{B} = \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha); U_\alpha, \alpha \in A\}$ を sub base とする位相 (つまり、$\mathcal{B}$ から生成される位相) を、積空間 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ の積位相という。
ただし、p_α は $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ から X_α への射影とする。
この位相は、有限個の $\alpha \in A$ を除いて $U_\alpha = X_\alpha$ とする $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ の全体を base としたのと同じである。
A が有限の場合は、$X_1 \times \cdots \times X_n$ の位相は、$\{U_1 \times \cdots \times U_n; U_i : \text{open in } X_i (i = 1, ..., n)\}$ を base としたのと同じである。

定義(連続、continuous)
写像 $f : X \to Y$ が連続 (continuous) とは、Y の任意の開集合 U に対して、逆像 $f^{-1}(U)$ が開集合となること。
(注) 連続の定義は、次の各条件と同値である。

(1)Y の任意の閉集合 U に対して、逆像 $f^{-1}(U)$ が閉集合となる。
(2)X の任意の部分集合 A に対して、$f(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset \mathrm{Cl}_Y(f(A))$ となる。
(3)X の各点で連続となる。

ここで、f が点 $x_0 \in X$ で連続とは、$\forall V$:open nbd of $f(x_0)$ $\exists U$:open in X s.t. $f(U) \subset V$ となることである。

証明 (命題 1-3)
連続と同値な条件 (3) を使って証明する。
$(x_1, ..., x_n) \in X^n$ を取り。その像、$pr\,(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{F}_n(X)$ の近傍 V に対して、$\langle U_1, ..., U_n \rangle \subset V$ を取る。ただし、$x_i \in U_i (i = 1, ..., n)$ とする。このとき、$U = U_1 \times \cdots \times U_n$ とすると、U は x の近傍で、 $pr(U)$ の元は、ある点 $(y_1, ..., y_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$ の像 $pr\,(y_1, ..., y_n) = \{y_1, ..., y_n\}$ であり、$y_i \in U_i (i = 1, ..., n)$ より $pr\,(y_1, ..., y_n) \in \langle U_1, ..., U_n \rangle$ となる。従って、$pr(U) \subset \langle U_1, ..., U_n \rangle \subset V$ である。
(証明終)

0.2 Proposition 2.5. について

記号.
空間 X に対し、
$C(X) = \{E \in 2^X; E \text{ is compact}\} =$
$\{E \subset X; E \text{ is compact}, E \neq \emptyset, E \text{ is closed in} X\}$
とする。

定義.(有限交叉性)
集合 X の部分集合族 $\mathcal{W}$ が、有限交叉性 (finite intersection property) を持つとは、$\mathcal{W}$ の任意の有限部分族が共通部分を持つこと。
i.e. $\forall n = 1, 2, 3, ...\ \forall W_1, ..., W_n \in \mathcal{W}(W_1 \cap ... \cap W_n \neq \emptyset)$

定義.(コンパクト)
空間 X がコンパクト (compact) とは、次の条件を充たすことである。
(0) X の任意の開被覆が有限部分被覆を持つ。

補題2-1-1.
空間 X がコンパクトであることは、次の条件 (1),(2) のひとつを充たすことと同値である。
(1) X の閉集合族が共通部分を持たないなら、共通部分を持たない部分族を含む。
(2) X の閉集合族が有限交叉性を持てば、その閉集合族は共通部分を持つ。

証明
(0)↔(1)：互いに補集合を取って考えればよい。$\mathcal{W}$ を X の閉集合族で、共通部分を持たない i.e. $\bigcap \mathcal{W} = \emptyset$ とする。このとき、$\mathcal{U} = \{X \setminus W; W \in \mathcal{W}\}$ とすれば、$\mathcal{U}$ は、X の開被覆である。
(1)↔(2)：有限交叉性を否定すると”共通部分を持たない有限部分族がある” となるから、命題 (1),(2) は互いに対偶の関係にある。
(証明終)

定義.(基本近傍系)
$\mathcal{U}$ が点 x の基本近傍系 (fundamental neighborhood system) であるとは、
$\forall V$: open nbd of x $\exists U \in \mathcal{U}$ s.t. $U \subset V$ となること。

定義.(正則空間、regular space)
空間 X が正則空間であるとは、次の分離公理 T_0, T_3 を充たすことである。
T_0(Kolmogorov の公理)：異なる 2 点に対し、少なくとも一方の近傍で他方を含まないものが存在する。
T_3(Vietoris の公理)：$\forall x \in X\ \forall A \subset X\ (x \notin \overline{A} \to x$ と A が開集合で分離される)
T_3'：任意の点 x に対して、x の閉近傍からなる x の基本近傍系がある。
T_3''：$\forall x \in X\ \forall A$：closed in $X(x \notin A \to x$ と A が開集合で分離される)
(注) 点 x と集合 A が開集合で分離されるとは、
$x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在することである。

補題2-1-2.
分離公理 T_3, T_3', T_3'' は互いに同値である。

証明
$\mathrm{T}_3 \to \mathrm{T}_3''$：$x \in X, A$:closed in $X, x \notin A$ とする。$\overline{A} = A$ なので、$x \notin \overline{A}$ となるから、点 x と集合 A が開集合で分離される。
$\mathrm{T}_3'' \to \mathrm{T}_3$：$x \in X, A \subset X, x \notin \overline{A}$ のとき、閉集合 $\overline{A}$ に対して、$x \in U$, $\overline{A} \subset V$, $U \cap V = \emptyset$となる開集合 U, V を取る。$A \subset \overline{A} \subset V$ となるから、U, V が点 x

と集合 A を分離する。

$\mathrm{T}_3'' \to \mathrm{T}_3'$: $x \in X$, V:open in X, $x \in V$ のとき、$A = X \setminus V$ とする。$x \notin A$, A: closed であるから、$x \in O_1, A \subset O_2, O_1 \cap O_2 = \emptyset$となる開集合 O_1, O_2 を取る。このとき、$x \in O_1 \subset X \setminus O_2 \subset X \setminus A = V$ であり、$N = X \setminus O_2$ とすれば、N が x の closed nbd である。

$\mathrm{T}_3' \to \mathrm{T}_3''$: $x \notin A, A$:closed のとき、$V = X \setminus A$ とする。V:open in X, $x \in V$ より x の閉近傍 N で $N \subset V$ となるものと、$x \in O_1 \subset N$ なる開集合 O_1 が取れる。$O_2 = X \setminus N$ とすると、$A = X \setminus V \subset O_2$ で $O_1 \cap O_2 = \emptyset$となるから、x と A が O_1, O_2 によって分離された。

(証明終)

(注) 上の証明には、T_3' と同値な次の条件を使った。

$\forall x \in X\ \forall V$: open nbd of x $\exists N$: closed nbd of x s.t. $N \subset V$

また、このとき $\exists U$: open $x \in U \subset N$ である。

補題2-1-3.(Lemma 2.2.2)

$N \subset X$ が closed なら、$\left\{E \in 2^X; E \cap N \neq \emptyset\right\}$ は closed in $\left(2^X, 2^T\right)$ となる。

(注) これは、2009 年の紀要の命題 2-3(d) で証明済み。

補題2-1-4.

正則空間 X では、

$x \in \overline{A} \leftrightarrow \forall V$: closed nbd of $x(V \cap A \neq \emptyset)$

ただし、$\overline{A}$ は、X での、A の閉包 (closure) とする。

証明

($\to$ は明らかなので、$\leftarrow$ を示す。) 後を仮定して、U を x の近傍とする。補題 2-1-2 の注に書いた T_3' と同値な命題より、x の閉近傍 V で $x \in V \subset U$ となるものを取る。$V \cap A \neq \emptyset$となるから、$U \cap A (\supset V \cap A) \neq \emptyset$である。

(証明終)

(注) 普通は、$x \in \overline{A} \leftrightarrow \forall V$: nbd of $x(V \cap A \neq \emptyset)$ と考えるが命題 2-1 の証明用に直した。

命題2-1.(Proposition 2.5)

(1) (X,T) が正則空間のとき、$\mathfrak{B} \in C\left(2^X, 2^T\right)$ なら、$\left(\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E\right) \in 2^X$

(2) (X,T) が空間のとき、$\mathfrak{B} \in C\left(C(X), 2^T\right)$ なら、$\left(\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E\right) \in C(X)$

証明

(1) の証明

$\mathfrak{B} \in C\left(2^X\right)$ とするとき、$A = \bigcup \mathfrak{B}$ として、点 $x \in \overline{A}$ を取る。$x \in A$ を示せば、A が closed つまり $A \in 2^X$ が示される。これを次のように示す。

x の任意の閉近傍 N(よって $x \in N \subset X$) に対し、補題 2-1-3 より、$\left\{E \in 2^X; E \cap N \neq \emptyset\right\}$ は closed in 2^X であり、また、$\mathfrak{B}$ は 2^X のコンパクト集合なので closed in 2^X であるから、$\mathfrak{B}(N) = \mathfrak{B} \cap \left\{E \in 2^X; E \cap N \neq \emptyset\right\}$ とすると、$\mathfrak{B}(N)$ は closed in 2^X である。

2^X の閉集合族 $\mathfrak{W} = \{\mathfrak{B}(N)$; N:closed in $X\}$ を考えると、$\mathfrak{W}$ は、$\mathfrak{B}$ の閉集合族で有限交叉性を持つ。$\cdots(*)$

$\mathfrak{B}$ がコンパクトより、そのような閉集合族は共通点を持つ (コンパクトと同値な条件 (2))。よって、$\bigcap \mathfrak{W} \neq \emptyset$となる。$\mathfrak{D} = \bigcap \mathfrak{W}$ とするとき、$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}, \mathfrak{D} \neq \emptyset$となる。$E \in \mathfrak{D}$ を取ると、x のすべての閉近傍 N に対し、$N \cap E \neq \emptyset$となるが、X が正則であるから、補題 2-1-4 より $x \in \overline{E}$ となる。

$E \in \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$ より $E = \overline{E}$ なので、$x \in E$ である。

$E \in \mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$ かつ $\bigcup \mathfrak{B} = A$ なので、$x \in A$

$(*)$ の証明

$\mathfrak{W}$ の有限部分族 $\{\mathfrak{B}(N_i); i = 1, ..., n\}$ (ただし、$N_i(1, ..., n)$ は x の閉近傍 in X) を取る。

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}(N_1) \cap ... \cap \mathfrak{B}(N_n) \\
&= \bigcap_{i=1,...n} \left(\mathfrak{B} \cap \left\{E \in 2^X; E \cap N_i \neq \emptyset\right\}\right) \\
&= \mathfrak{B} \cap \left(\bigcap_{i=1,...n} \left\{E \in 2^X; E \cap N_i \neq \emptyset\right\}\right) \\
&= \mathfrak{B} \cap \left\{E \in 2^X; E \cap N_i \neq \emptyset (i = 1, ..., n)\right\} \\
&\supset \mathfrak{B} \cap \left\{E \in 2^X; E \cap (N_1 \cap ... \cap N_n) \neq \emptyset\right\}
\end{aligned}
$$

ここで、$N = N_1 \cap ... \cap N_n$ とすると、N は x の閉近傍であるから、$\mathfrak{B}(N) \in \mathfrak{W}$ であって、$\mathfrak{B}(N_1) \cap ... \cap \mathfrak{B}(N_n) \supset \mathfrak{B}(N)$ となる。

一方、$x \in \overline{A}$ より、$N \cap A \neq \emptyset$であるが、$A = \bigcap \mathfrak{B}$ なので、$E \in \mathfrak{B}$ が取れて、$N \cap E \neq \emptyset$となる。$E \in \mathfrak{B}(N) \subset \mathfrak{B}(N_1) \cap ... \cap \mathfrak{B}(N_n)$ となるから、$\mathfrak{B}(N_1) \cap ... \cap \mathfrak{B}(N_n) \neq \emptyset$である。

($(*)$ の証明終)

((1) の証明終)

(2) の証明

$\mathfrak{B} \in C(C(X))$ とするとき、$A = \bigcup \mathfrak{B}$ とする。X の部分集合の族 $\mathfrak{U}$ を A の開被覆とする。各 $E \in \mathfrak{B}$ がコンパクトなので、E を cover する $\mathfrak{U}$ の部分族に対し、さらに有限部分被覆 $\mathfrak{U}(E)$= $\{U_E(1), ..., U_E(n_{_E})\}$ で E を cover 出来る。(その個数は、E ごとに $n_{_E}$ 個とする。) $\mathfrak{U}(E)$ の元がすべて、E と交わるから $\mathfrak{U}_E$=$\langle U_E(1), ..., U_E(n_{_E})\rangle$ が E の開近傍であり、$\{\mathfrak{U}_E\}_{E\in\mathfrak{B}}$ が $\mathfrak{B}$ の開被覆で、その有限部分被覆が取れる。その有限部分被覆が、$\mathfrak{B}$ から選んだ有限個の $E_1, ..., E_m$ に対する $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{U}_{E_1}, ..., \mathfrak{U}_{E_m}\}$ であるとする。結局、A の開被覆 $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆として、$\mathfrak{W} = \displaystyle\bigcup_{i=1,...,m} \mathfrak{U}(E_i)$ を取ればよい。$\cdots(**)$

$(**)$ の証明

$x \in A = \bigcup \mathfrak{B}$ とする。$x \in E \in \mathfrak{B}$ となる E が取れる。$\mathfrak{V} = \{\mathfrak{U}_{E_1}, ..., \mathfrak{U}_{E_m}\}$ が $\mathfrak{B}$ の被覆なので、$E \in \mathfrak{U}_{E_j} = \left\langle U_{E_j}(1), ..., U_{E_j}(n_{_{E_j}})\right\rangle$ となる $j = 1, ..., m$ が存在する。$\langle\cdots\rangle$ の定義より $E \subset U_{E_j}(1) \cup ... \cup U_{E_j}(n_{_{E_j}}) = \bigcup \mathfrak{U}(E_j) \subset \bigcup \mathfrak{W}$ となるから、$x \in \bigcup \mathfrak{W}$ であり、$\mathfrak{W}$ が A を cover する。また、$\mathfrak{W}$ の要素の個数は $n_{_{E_1}} + n_{_{E_m}}$ 以下であり、$\mathfrak{W}$ が $\mathfrak{U}$ の有限部分被覆となる。

($(**)$ の証明終)

((2) の証明終)

0.3 Proposition 2.7 & 2.8 について

定義.(位相の比較)

集合 X に 2 つの位相が $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ 入っているとき、$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ならば、$\mathcal{U}$ は $\mathcal{V}$ より弱い (weak) または、粗い (coarse) という。逆に、$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ より強い (strong) または、細かい (fine) という。

離散位相 (discerete topology) は最も強い位相であり、密着位相 (indiscrete topology, anti-discrete topology) は最も弱い位相である。

定義.(像位相)

$(X, \mathcal{T})$ を位相空間、Y を集合、f を X から Y への写像とする。Y の部分集合 B で、$f^{-1}[B]$ が X の開集合であるものの全体、すなわち $\{B \in \mathcal{P}(Y); f^{-1}[B] \in \mathcal{T}\}$ を $\mathcal{S}$ とすると、$\mathcal{S}$ は開集合系の三条件をみたし、$(Y, \mathcal{S})$ は位相空間になる。$\mathcal{S}$ を $\mathcal{T}$ の f による像位相という。

(注) f は $(X, \mathcal{T})$ から $(Y, \mathcal{S})$ への連続写像である。Y の像位相は、f を連続とするような Y の最も強い位相として定義することも出来る。

定義.(商位相)

X を位相空間、R を X の点の間の同値関係、Y を X の R に関する商集合 Y/R とする。$f : X \to Y$ を標準射影とする。

Y に f による像位相を導入するとき、この位相を R による商位相 (quotient topology) とよび、Y を R による商位相空間または単に商空間 (quotient space) という。

(注) 商位相を等化位相、商空間を等化空間ということもある。

定義.(逆像位相)

X を集合、$(Y, \mathcal{S})$ を位相空間、f を X から Y への写像とする。Y の開集合の f による逆像の全体、すなわち $\{f^{-1}[B]; B \in \mathcal{S}\}$ を $\mathcal{T}$ とする。$\mathcal{T}$ は開集合系の三条件をみたし、$(X, \mathcal{T})$ は位相空間になる。$\mathcal{T}$ を $\mathcal{S}$ の f による逆像位相という。

(注 1) f は $(X, \mathcal{T})$ から $(Y, \mathcal{S})$ への連続写像である。X の逆像位相は、f を連続とするような X の最も弱い位相として定義することも出来る。

(注 2) 積位相と部分位相は、逆像位相により定義できる。

定義.(部分空間)

$(X, \mathcal{T})$ を位相空間、Y を X の部分集合とする。$\mathcal{T}(Y) = \{U \cap Y; U \in \mathcal{T}\}$ として、Y に導入される位相を相対位相 (relative topology) といい、空間 $(Y, \mathcal{T}(Y))$ を $(X, \mathcal{T})$ の部分空間 (subspace) という。

命題３-１.(Proposition 2.7.)

$\mathfrak{D}$ が空間 (X, T) の閉集合からなる disjoint covering である時、$\mathfrak{D}$ 上の商位相は、2^T によって $\mathfrak{D}$ 上に導入した相対位相 (relative topology) より coarser となる。

(注) ここでは、$\mathfrak{D}$ 上の商位相を次のように考える。: $x \in X$ に対して、$x \in D$ となる $D \in \mathfrak{D}$ が存在するから、そのとき $f(x) = D$ として、写像 $f : X \to \mathfrak{D}$ を定める。この f による像位相を $\mathfrak{D}$ 上の商位相とする。

証明

$\mathfrak{D}$ の商位相による開集合が 2^T での開集合となることを示せばよい。

$f: X \to \mathfrak{D}$ を商写像とし、部分集合 $\mathfrak{U}$ が $\mathfrak{D}$ 上の商位相で open とする。商位相の定義より f による逆像が X の開集合となる。$f^{-1}(\mathfrak{U}) = \bigcup \mathfrak{U}$ が open なので、$\langle \bigcup \mathfrak{U} \rangle \in 2^T$ となる。任意の $D \in \mathfrak{U}$ を取る。このとき、

(1) 2009 年の紀要の命題 2-1(a) の証明中にも示したように、X の開集合 A に対し、$\langle A \rangle = \left\{E \in 2^X; E \subset A\right\}$ であるから、$D \in \mathfrak{U}$ のとき、$D \subset \bigcup \mathfrak{U}$ より、$D \in \langle \bigcup \mathfrak{U} \rangle$ である。

(2) 任意の $E \in \langle \bigcup \mathfrak{U} \rangle \cap \mathfrak{D}$ を取るとき、$E \in \langle \bigcup \mathfrak{U} \rangle$ より、$E \subset \bigcup \mathfrak{U}$ である。$E \in \mathfrak{D}$ かつ $E \subset \bigcup \mathfrak{U}$ となるとき、$\mathfrak{D}$ が disjoint な族なので、$E \in \mathfrak{U}$ となる。従って、$\langle \bigcup \mathfrak{U} \rangle \cap \mathfrak{D} \subset \mathfrak{U}$ となる。

(1),(2) より、$D \in \langle \bigcup \mathfrak{U} \rangle \cap \mathfrak{D} \subset \mathfrak{U}$ なので、$\mathfrak{U}$ は、2^T の open である。

(証明終)

定義.(連結)

X を位相空間とするとき、X と $\emptyset$は X の開かつ閉な部分集合である。それ以外に、開かつ閉な部分集合がないとき、X を連結 (connected) という。連結でないことを非連結 (disconnected) という。

X の部分集合 A が連結とは、A が X の部分空間として、連結であることとする。

(注) 空間 X の非連結性は、次の 3 条件の各々と同値である。

(1) X の空でない開かつ閉な真部分集合が存在する。

(2) $U \cup V = X$ かつ $U \cap V = \emptyset$となる空でない開集合 U, V が存在する。

(3) $U \cup V = X$ かつ $U \cap V = \emptyset$となる空でない閉集合 U, V が存在する。

命題３-２.(Proposition 2.8.)

(1) $\mathfrak{B}$ が X の部分集合の disjoint な族で、商位相で connected、かつ、その要素が全て connected なら、$\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$ は connected である。

(2) $\mathfrak{B}$ が 2^X の部分族で、finite topology で connected、かつ、その要素のひとつが connected なら、$\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$ は connected である。

証明

(1) $\bigcup \mathfrak{B}$ が connected でなく、$\bigcup \mathfrak{B}$ の空でない開集合 U, V が、$\bigcup \mathfrak{B} = U \cup V$ かつ $U \cap V = \emptyset$となるように取れたと仮定する。$\mathfrak{B}$ の要素 E がすべて connected であるから、$E \cap U \neq \emptyset$なら $E \subset U$ なので $E \in \mathfrak{U}$ とし、$E \cap V \neq \emptyset$なら $E \subset V$ なので $E \in \mathfrak{V}$ とする。$\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ かつ $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V} = \emptyset$となる。$U, V$ が空でないから、$\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{V}$ も共に、空でない。$\bigcup \mathfrak{U} = U$ と $\bigcup \mathfrak{V} = V$ が $\bigcup \mathfrak{B}$ の開集合なので、$\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{V}$ が $\mathfrak{B}$ の開集合であり、$\mathfrak{B}$ が connected であることに矛盾する。

(2) $\bigcup \mathfrak{B}$ が connected でなく、$\bigcup \mathfrak{B}$ の空でない開集合 U, V が、$\bigcup \mathfrak{B} = U \cup V$ かつ $U \cap V = \emptyset$となるように取れたと仮定する。そのとき、U, V は、$\bigcup \mathfrak{B}$ の空でない閉集合でもある。$\mathfrak{B}$ から connected な要素 F をひとつ取るとき、$F \subset U \cup V$ であるが、F が connected なので、$F \cap U \neq \emptyset$なら $F \subset U$ であり、$F \cap V \neq \emptyset$なら $F \subset V$ となる。ここでは、$F \subset U$ とする。$\mathfrak{U} = \{E \in 2^X; E \subset U\}$ とすれば、$\mathfrak{U}$ は、空でなく $\mathfrak{B}$ にも等しくない。U が開集合なので、下の補題 3-2-1(a) より $\mathfrak{U}$ は、開集合である。また、U が閉集合なので、下の補題 3-2-1(b) より $\mathfrak{U}$ は、閉集合である。この $\mathfrak{U}$ は、非連結性の条件 (1) をみたし、$\mathfrak{B}$ が connected であることに矛盾する。

(証明終)

補題３-２-１.

finite topology 2^T は、2^X 上の acceptable な位相である、すなわち、

(a) すべての A : open in X について、

$\{E \in 2^X; E \subset A\}$: open in $(2^X, 2^T)$ 、かつ、

(b) すべての A : closed in X について、

$\{E \in 2^X; E \subset A\}$: closed in $(2^X, 2^T)$

である。

(注) これは、2009 年の紀要の命題 2-1 で証明済み。

注意：命題 3-2(2) は、次のように改良すれば、補題 3-2-1 によらなくて良い。

(2) の別証明：

$\bigcup \mathfrak{B}$ が連結でなく、X の空でない開集合 U, V が、$U \cup V \supset \bigcup \mathfrak{B}$ かつ $U \cap V = \emptyset$となるように取れたと仮定する。$\mathfrak{B}$ から connected な要素 F をひとつ取るとき、$F \subset U \cup V$ となる。F の連結性より、$F \cap U \neq \emptyset$ なら $F \subset U$ となるから $F \in \langle U \rangle$ であり、$F \cap V \neq \emptyset$ なら $F \subset V$ となるから $F \in \langle V \rangle$ となる。F 以外の $\mathfrak{B}$ の要素 G も、$G \cap U \neq \emptyset$ また

は $G \cap V \neq \emptyset$ であり、$G \in \langle U \rangle \cup \langle V \rangle \cup \langle U, V \rangle \neq \emptyset$ となるから、$\mathfrak{B} \subset \langle U \rangle \cup \langle V \rangle \cup \langle U, V \rangle$ となる。$\langle U \rangle, \langle V \rangle, \langle U, V \rangle$ の 3 つは互いに素であり、また、そのうち 2 つが空となることはあり得ない。
$\langle U, V \rangle \neq \emptyset$ のときは、$\mathfrak{U} = \langle U \rangle \cup \langle V \rangle, \mathfrak{V} = \langle U, V \rangle$ とし、$\langle U, V \rangle = \emptyset$ のときは、$\mathfrak{U} = \langle U \rangle, \mathfrak{V} = \langle V \rangle$ とする。そのとき、$\mathfrak{U}$ と $\mathfrak{V}$ が 2^X の互いに素な開集合であり、$\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \supset \mathfrak{B}$ となるから、$\mathfrak{B}$ が connected であることに矛盾する。
(証明終)

参考文献

久保康幸 “finite topology の basis について” 弓削商船紀要 第 32 号 (2009) pp.109–113.

Michael, Ernest “Topologies on spaces of subsets.” Trans.Amer.Math.Soc. 71,(1951) pp.152–182.

児玉之宏・永見啓応 “位相空間論” 岩波書店 (1974).

森田紀一 “位相空間論 (岩波全書 331)” 岩波書店 (1981).

松坂和夫 “集合・位相入門” 岩波書店 (1968).

青木利夫・高橋渉 “集合・位相空間要論” 培風館 (1979).

“岩波 数学辞典 第 3 版” 岩波書店 (1985).

R. Engelking “General Topology” Revised and completed edition, Helderman Verlag Berlin (1989).