

# 縁き裂の応力拡大係数に及ぼす 円形介在物の干渉効果の近似解法

鶴 秀登<sup>\*</sup>・村上 智洋<sup>\*\*</sup>

## A Method of Approximate Calculation for Interference Effect of Circular Inclusions on SIF of a Edge Crack

Hideto Tsuru<sup>\*</sup>, Tomohiro Murakami<sup>\*\*</sup>

### Abstract

In design of machines, it is often important to know the state of stress around crack and to obtain the stress intensity factors (SIF) for many crack problems. And there are a lot of results by means of many analytical or numerical analyses of them. But it is difficult to analyze the general crack problems. Then in this paper, tension problems of a edge crack in a semi-infinite plate having two circular inclusions symmetrically are treated by a method of approximate analysis. The analysis is fundamentally based on the principle of superposition, and the boundary conditions of crack surfaces are satisfied, but the conditions of circular inclusions are imperfect. According to the results of calculations, the stress intensity factors are shown to be in good agreement with the known solutions and are changing due to the configuration parameter of edge crack and circular inclusions or due to the ratio of elastic modulus of circular inclusion to matrix.

### 1. 緒 言

構造物や部材の強度評価は破壊を防止する上で必要不可欠である。破壊の原因は多種多様だが、構造物に含まれる欠陥は応力集中現象を引き起こし、脆性破壊や疲労破壊の起点となる。応力集中がある場合、最大応力が同じであっても破壊を支配する領域の応力分布が異なると破壊現象が同一とは限らない。したがって、破壊を支配する領域の力学的環境の厳しさを最大応力と応力分布により評価することは非常に重要である<sup>[1]~[3]</sup>。き裂の場合、この応力場を応力拡大係数 (Stress Intensity Factor :SIF) のみで表せる<sup>[4][5]</sup>。この応力拡大係数は線形破壊力学における最も代表的なパラメータであり、その解析には各種方法が適用されるが、数学的知識が必要となり取扱いが複雑である。

本研究では円形介在物をもつ半無限板縁き裂問題を、き裂面に内圧が作用する問題に置換え応力拡大係数の近似計算を行った。具体的には有限要素法 (Finite Element Method : FEM) を用い、半無限板に円形介在

物がある問題の応力場を有限領域で近似解析し、き裂相当位置の応力分布を求める。そして、半無限板の縁き裂が内圧を受ける問題<sup>[3]</sup>にその応力分布を適用し、半無限板の縁き裂と介在物の干渉問題の応力拡大係数を近似的に得た。さらに、円形介在物と縁き裂の相対位置および母材との剛性比によって縁き裂の応力拡大係数が変化することを定量的に示した。

### 2. 解 析 方 法

図 1 に示す半無限板の縁き裂近傍に円形介在物があるモード I 変形問題は、図 2(a) に示す重ね合わせによって解が得られる。さらにこれを図 2(b) に示す近似解析モデルで取扱った。このモデルは取扱いが非常に簡便である。すなわち、図 2(b) に示すき裂のない介在物問題の応力計算を行い、き裂相当位置の応力分布  $p(x)$  を求める。次に介在物のない半無限板の縁き裂がき裂縁に内圧を受ける問題にその応力分布  $p(x)$  を用いる。すると問題の応力拡大係数がこの場合の応力

\* 電子機械工学科

\*\* 専攻科生産システム工学専攻

拡大係数で近似できる．この近似解法は，重ね合わせによってき裂縁自由の条件は満たされるが，2次的に介在物の境界条件が満たされていない．結局，応力拡大係数は応力分布  $p(x)$  を最小二乗法により  $x$  の3次式(1)で近似して，次式(2)で得られる<sup>[3][4]</sup>．なお，き裂のない半無限板の応力分布  $p(x)$  の計算は，図3に示す有限板の自由表面近傍に介在物がある問題に置換え，市販のFEM解析ソフト(プリ・ポストプロセッサ MSC.Patran, ソルバー MD.Nastran)を用いて行った．

$$p(x) = \sigma_0 \sum_{n=0}^3 C_n \left(\frac{x}{a}\right)^n \quad (1)$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} (1.1215C_0 + 0.6829C_1 + 0.5255C_2 + 0.4410C_3) \quad (2)$$

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} = 1.1215C_0 + 0.6829C_1 + 0.5255C_2 + 0.4410C_3 \quad (3)$$

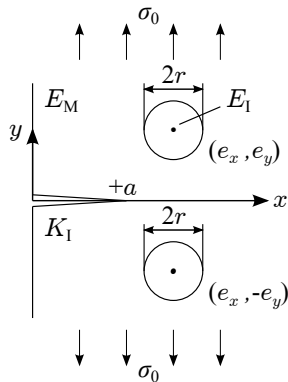
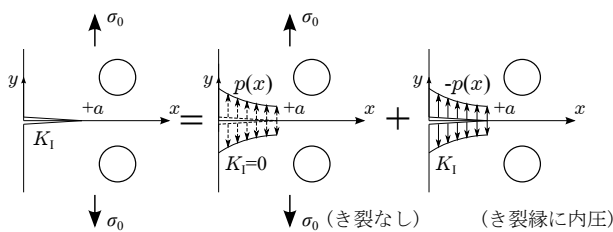
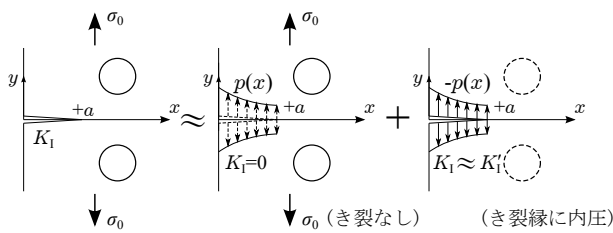


図1 円形介在物がある縁き裂のモードI変形問題



(a) 重ね合わせによる厳密解法



(b) 介在物の境界条件が不完全な近似解法

図2 き裂先端近傍の応力場の簡便解法

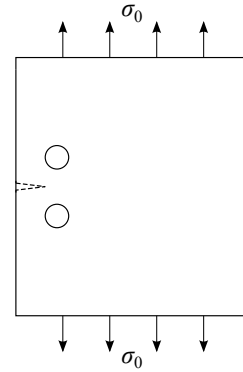


図3 半無限板の応力場のFEM解析モデル

### 3. 数値計算結果と検討

本近似手法による結果の精度を検討するため，図4に示す半無限板の縁き裂に先行するだ円孔問題について既知の解<sup>[6]</sup>と比較した．き裂長さを  $a$ ，だ円孔の長径  $2r$ ，短径  $2b$ ，半無限板の表面からだ円孔中心までの距離  $d$  として，き裂長さとだ円孔の形状比  $a/2r = 1.0$ ，き裂長さとだ円孔の中心位置の比  $a/d = 0.4$  の場合について，孔径比  $r/b = 1.0, 2.0, 8.0$  の各場合を計算し，応力拡大係数の修正係数  $F_I$  を求めた．表1にその結果を既知の精度良い結果<sup>[6]</sup>と比較して示す．ここで取扱った場合はやや干渉効果が小さいが，本近似手法が精度よく適用できることがわかる．なお，このだ円欠陥の応力場は図3と同様に有限板を用い，FEMで数値解析した．

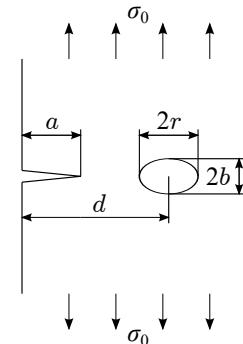


図4 き裂に先行するだ円孔問題

表1 図4の問題における本法の精度

( $a/2r = 1.0, a/d = 0.4$ )

$r/b$	$F_I$	
	本法	[Ref.6]
1.0	1.17	1.20
2.0	1.18	1.18
8.0	1.19	1.18

さて図1に示すき裂に対して対称な位置に円形介在物がある半無限板の縁き裂問題の精度は不明であるが、き裂に介在物がごく近い場合 ( $a/e_x = 1.0, r/e_y = 0.9$  など) を除き近似解法の精度は表1と同程度と考えられる。座標を図1のように置き、き裂長さ  $a$ 、円形介在物の中心位置  $(e_x, \pm e_y)$ 、半径  $r$ 、縦弾性係数  $E_I$ 、母材の縦弾性係数  $E_M$  とし、き裂長さ  $a$  と円形介在物の形状比  $a/2r = 1.0$  に固定し、き裂長さ  $a$  と円形介在物の中心  $x$  座標の比  $a/e_x$  と、円形介在物半径とその中心  $y$  座標の比  $r/e_y$  を変化させて数値計算を行った。また、両者ともポアソン比  $\nu = 0.3$  とし、母材と介在物の縦弾性係数比 (剛性比)  $E_M/E_I$  または  $E_I/E_M$  を変化させた。そして、円形介在物の位置および剛性比がき裂に及ぼす影響を応力拡大係数の修正係数  $F_I$  で図と表に示した。

図5はき裂先端と介在物中心位置が同じ  $a/e_x = 1.0$  の場合で、円形介在物の材質が応力拡大係数に及ぼす影響を調べるために、横軸に縦弾性係数の比 ((a) は  $E_M/E_I$ , (b) は  $E_I/E_M$ )、縦軸に応力拡大係数の修正係数  $F_I$  を取った。パラメータとして介在物のき裂線上からの位置がわかるように、その半径  $r$  と中心座標  $e_y$  の比  $r/e_y$  を用いた。さらに図6~図9に、き裂先端と介在物中心位置が横方向 ( $x$  軸方向) に変化した  $a/e_x = 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$  の各場合を示す。この値が小さいほどき裂先端から介在物が離れる場合となる。

図5(a)( $a/e_x = 1.0$ ) からわかるように、硬質介在物である  $E_M/E_I \leq 1$  では、 $r/e_y = 0$  (半無限板に縁き裂を有する問題) の応力拡大係数の修正係数 1.1215 よりも大きくなり、縁き裂に円形介在物が近接していくと、き裂先端近傍の応力場に与える影響が増加するこ

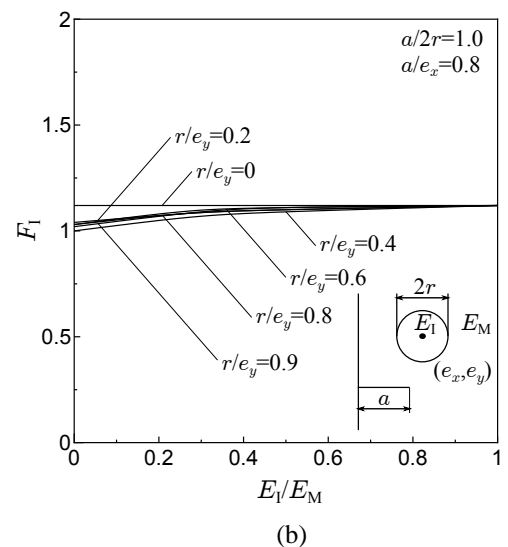
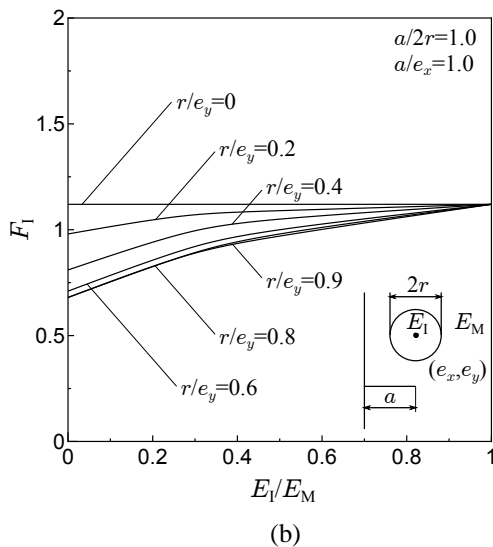
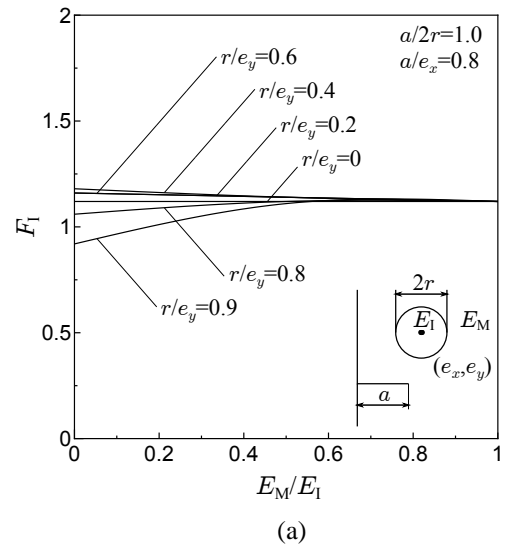
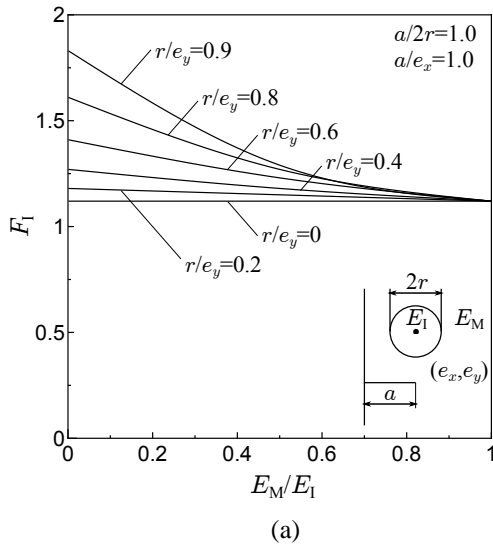


図5 縁き裂と介在物の干渉 ( $a/e_x = 1.0$ )

図6 縁き裂と介在物の干渉 ( $a/e_x = 0.8$ )

とがわかる．したがって、き裂先端の  $y$  方向線上に位置する硬質介在物の干渉効果は危険側となる．また、剛性比  $E_M/E_I = 1.0$  に近づくと当然  $F_I = 1.1215$  となる．一方、図 5(b) からわかるように、軟質介在物 ( $E_I/E_M \leq 1$ ) が緑き裂の近傍に存在すると  $F_I = 1.1215$  より小さくなり、応力拡大係数の緩和効果が高まることわかる．最も  $F_I$  が小さくなった  $r/e_y = 0.9$  の場合、 $E_I/E_M = 0$  の空孔で最大 39% 低減した．これはき裂相当位置、特にき裂先端近傍相当位置のき裂を開口させる応力成分が軟質介在物によってさえぎられるためと考えられる．

図 6( $a/e_x = 0.8$ ) は介在物中心位置がき裂先端方向へやや離れた場合であるが、図 6(a) が示すように介在物の剛性が大きいとその  $y$  座標の位置の比  $r/e_y$  によって、干渉効果の大小だけでなく効果そのものの性

質が異なることがわかる． $E_M/E_I = 0.6$  以上になると介在物の  $y$  方向の位置に関係なく介在物の影響がない場合の  $F_I = 1.1215$  をとる．介在物の剛性が小さい図 6(b) の場合には、応力拡大係数を小さくする効果がでているが  $r/e_y$  に関係なくその影響は小さい．そして、軟質介在物の場合も  $E_I/E_M = 0.6$  以上で  $r/e_y$  に関係なく介在物の影響がなくなる．また、図 6(a)(b) より 2 つの介在物が緑き裂に近接すると介在物の剛性に関係なく応力拡大係数が小さくなるようである．

図 7( $a/e_x = 0.6$ )、図 8( $a/e_x = 0.4$ ) では介在物の輪郭がき裂先端位置の  $y$  方向線上に存在しなくなり、図 5( $a/e_x = 1.0$ ) の結果と逆の傾向を示した．介在物中心位置の  $x$  座標がき裂先端からやや離れると、剛性の大きい介在物が応力拡大係数を小さくし、剛性の小さい介在物は応力拡大係数を大きくすることが示された．

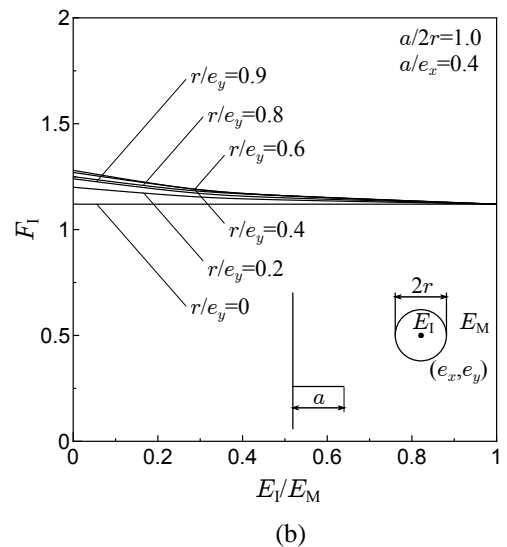
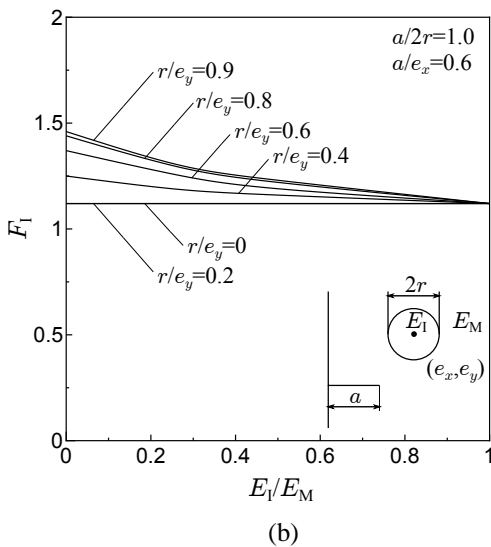
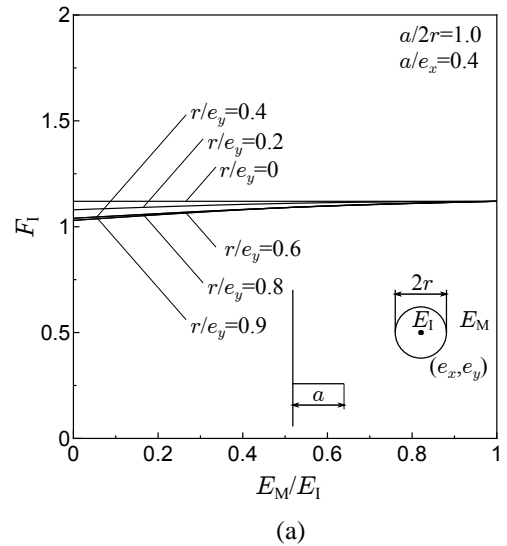
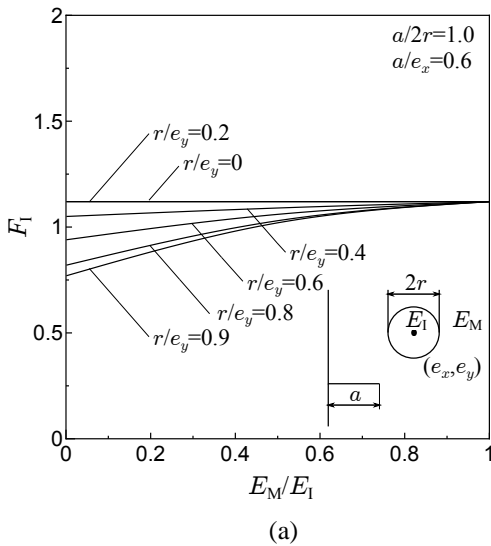


図 7 緑き裂と介在物の干渉 ( $a/e_x = 0.6$ )

図 8 緑き裂と介在物の干渉 ( $a/e_x = 0.4$ )

$r/e_y$  が比較的大きな値すなわち、2つの介在物が縁き裂に近接するとその影響が顕著である。干渉のない問題と比較して  $a/e_x = 0.6$ ,  $r/e_y = 0.9$  の場合、剛体介在物 ( $E_M/E_I = 0$ ) で最大31%低い値となり、空孔 ( $E_I/E_M = 0$ ) では30%大きい値となった。そして、き裂先端から介在物が離れると当然その影響が小さくなることわかる。

図9( $a/e_x = 0.2$ )については、 $r/e_y$ にも影響されずほとんど介在物の影響がなくなり、半無限板にき裂長さ  $a$  の縁き裂を有する問題 ( $F_I = 1.1215$ ) とほぼ同じ値となる。

図10, 図11に  $a/e_x = 1.0, 0.6$ について横軸に  $r/e_y$ , パラメータに  $E_I/E_M$  または  $E_M/E_I$  を用いて  $F_I$  の結果を示す。また、数値結果を表2, 表3にそれぞれ示す。図10, 図11とも図中の破線は  $E_I/E_M = 1.0$

の値すなわち、半無限板に縁き裂(き裂長さ  $a$ )を有する応力拡大係数の修正係数  $F_I = 1.1215$  を示す。図10( $a/e_x = 1.0$ )より  $F_I$  は  $r/e_y$  が大きくなる(2つの介在物が近づく)と、 $E_M/E_I < 1$  の領域では増加し、 $E_I/E_M < 1$  の領域では減少する。すなわち介在物が剛体である問題が最重要となる。図11( $a/e_x = 0.6$ )では  $E_M/E_I < 1$  の領域で減少し、 $E_I/E_M < 1$  の領域で増加していることがわかる。すなわち円孔問題が最も厳しい。このように介在物の  $x$  座標の位置により異なる効果となることに注意が必要である。また、図10( $a/e_x = 1.0$ )では介在物がき裂線上から離れても ( $r/e_y \rightarrow 0$ ) その影響は残るようであるが、 $a/e_x = 0.6$  の場合、介在物がき裂線上から離れた  $r/e_y \leq 0.2$  ではほぼ介在物の影響がなくなり  $F_I = 1.1215$  となる。

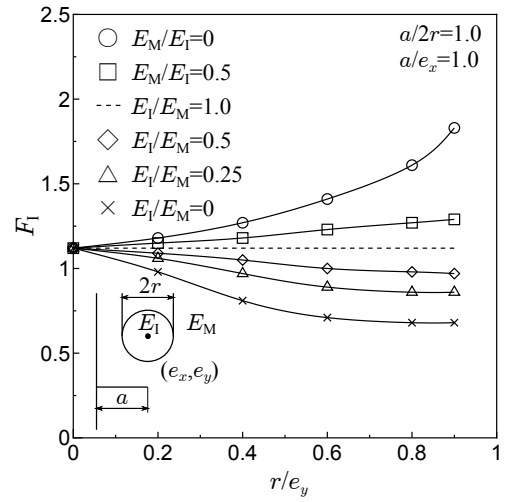
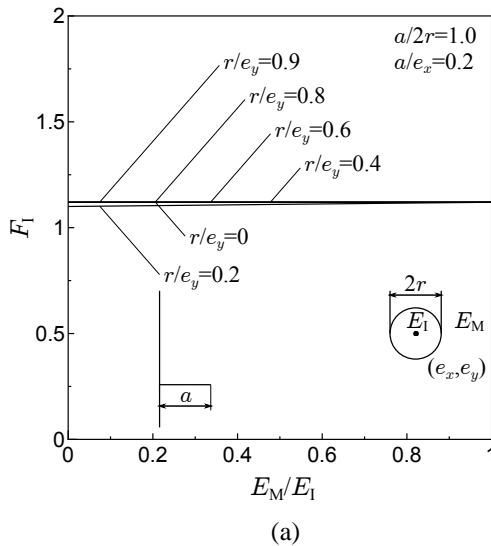


図10 き裂に及ぼす介在物位置への影響 ( $a/e_x = 1.0$ )

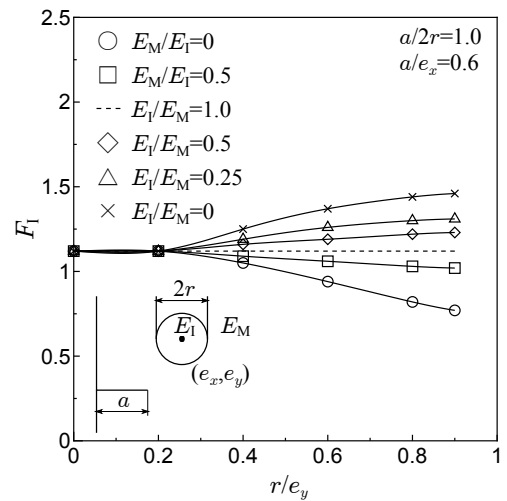
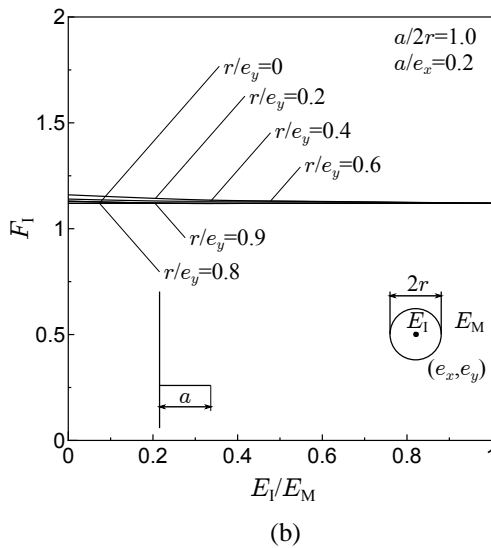


図11 き裂に及ぼす介在物位置への影響 ( $a/e_x = 0.6$ )

図9 縁き裂と介在物の干渉 ( $a/e_x = 0.2$ )

表2 き裂に及ぼす介在物位置への影響 ( $a/e_x = 1.0$ )

$r/e_y$	$E_M/E_I$		$E_I/E_M$			
	0	0.5	1.0	0.5	0.25	0
0	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
0.2	1.18	1.15	1.12	1.09	1.06	0.98
0.4	1.27	1.18	1.12	1.05	0.97	0.81
0.6	1.41	1.23	1.12	1.00	0.89	0.71
0.8	1.61	1.27	1.12	0.98	0.86	0.68
0.9	1.83	1.29	1.12	0.97	0.86	0.68

表3 き裂に及ぼす介在物位置への影響 ( $a/e_x = 0.6$ )

$r/e_y$	$E_M/E_I$		$E_I/E_M$			
	0	0.5	1.0	0.5	0.25	0
0	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
0.2	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
0.4	1.05	1.09	1.12	1.16	1.19	1.25
0.6	0.94	1.06	1.12	1.19	1.26	1.37
0.8	0.82	1.03	1.12	1.22	1.30	1.44
0.9	0.77	1.02	1.12	1.23	1.31	1.46

文 献

[1] 西谷弘信:日本機械学会論文集(A編),49巻,447号,PP.1353-1359,(1983-11)  
 [2] 陳:トライボロジスト,55巻,10号,PP.689-694,(2010)  
 [3] 村上敬宜:応力集中の考え方(養賢堂),(2005-7)  
 [4] 石田誠:破壊力学と材料強度講座2 き裂の弾性解析と応力拡大係数(培風館),(昭和51-6)  
 [5] 矢川元基:破壊力学(培風館),(1988-4)  
 [6] 西谷弘信,斉藤公則,原信幸:日本機械学会論文集39巻,324号,PP.2312-2322,(1973)

4. 結 言

半無限板の縁き裂に及ぼす円形介在物の干渉効果問題を近似的に取扱う方法を提案し,モードI変形における応力拡大係数を求めた.そして介在物と縁き裂の相対位置および母材と介在物の剛性比が,き裂の応力拡大係数に及ぼす影響を検討した.得られた結果を以下に示す.

- (1) き裂と円形介在物の相対位置および母材と介在物の剛性比によって,き裂に及ぼす影響の結果が異なる.
- (2) 計算した範囲で  $E_M/E_I < 1$  の領域における最小値は,剛体介在物 ( $E_M/E_I = 0$ ) が  $a/e_x = 0.6$ ,  $r/e_y = 0.9$  の位置で生じ,応力拡大係数は31%減少, $E_I/E_M < 1$  の領域では,空孔 ( $E_I/E_M = 0$ ) が  $a/e_x = 1.0$ ,  $r/e_y = 0.9$  の位置で最小となり,応力拡大係数は39%減少する.
- (3) 硬質介在物 ( $E_M/E_I < 1$ ) は,その中心位置が  $a/e_x \leq 0.6$  の場合,  $e_y$  に関係なく応力拡大係数を緩和する効果がある.一方,軟質介在物 ( $E_I/E_M < 1$ ) では,逆にその存在は危険側となる.
- (4) 計算した範囲において剛体介在物 ( $E_M/E_I = 0$ ) が  $a/e_x = 1.0$ ,  $r/e_y = 0.9$  の位置で応力拡大係数は63%増加する.