weak selection から作る topology について

久保 康幸 ∗

topology determined by weak selection

Yasuyuki Kubo ∗

Abstract

In this paper, I have noted my memo on article “Weak orderability of topological spaces”, V.Gutev, T.Nogura, Topology Appl. 157(2010)1249-1274.

昨年までの紀要では、[3] E.Michael “Topologies on spaces of subsets” Trans.Amer.Math.Soc. 71 (1951) 152-182 で、finite topology (= Vietoris topology) について見た。

今回の紀要は、その発展として [4] V.Gutev, T.Nogura “Weak orderability of topological spaces” Topology Appl. 157 (2010) 1249-1274. を読んで、selection について考えた。今回も、定理の後に ( ) で、元の論文の番号を付けることがある。

1. Selections and weak selections.

用語 *The Vietoris hyperspaces.*
T_1-space X に対し、$\mathscr{F}(X)$ を X の non-empty closed subsets 全体とする。$\mathscr{F}(X)$ に位相として Vietoris topology τ_V を考え、空間 $(\mathscr{F}(X), \tau_V)$ を X の Vietoris hyperspaces という。
(注) Vietoris topology は、昨年までの紀要で扱った finite topology のことである。

用語 *Selections and hyperspaces.*
全ての空間は、断らない限り infinite かつ Hausdorff とし、部分集合 $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}(X)$ には、hyperspaces $(\mathscr{F}(X), \tau_V)$ の部分空間としての相対的 Vietoris topology τ_V を考える。map $f : \mathscr{D} \to X$ が a selection for $\mathscr{D}$ であるとは、$f(S) \in S$ for every $S \in \mathscr{D}$ となることである。selection $f : \mathscr{D} \to X$ が continuous であるとは、それが、 relative Vietoris topology τ_V on $\mathscr{D}$ に関して continuous となることである。簡単のため、そのことを f が Vietoris continuous, または τ_V-continuous であると言うことがある。

記号
selections に関連して、$\mathscr{F}(X)$ の部分集合で次のものを考える:

$$\mathscr{F}_n(X) = \{S \subset X; 1 \leqq |S| \leqq n\} \text{ 、}$$
$$[X]^n = \{S \subset X; |S| = n\}, n \geqq 1.$$

用語 *Weak selection.*
$\mathscr{F}_2(X)$ に対する selection f は、X に対する weak selection と呼ばれる。

2. Weak selections and selection relations

記号 *Binary relations.*
relation $\mathscr{E}$ on X について、$x\mathscr{E}y$ と書いて $\langle x, y\rangle \in \mathscr{E}$ を表す。$\mathscr{E}$ の inverse relation $\mathscr{E}^{-1}$ は、$x\mathscr{E}^{-1}y \leftrightarrow y\mathscr{E}x$ として定義される。

X 上の relation $\mathscr{E}$ を X の subset についての relation へ拡張して、 $B, C \subset X$ について、$B\mathscr{E}C \leftrightarrow B\times C \subset \mathscr{E}$ と書くことにする。そのとき、$B\mathscr{E}C \leftrightarrow \forall y{\in}B\ \forall z{\in}C(y\mathscr{E}z)$ となる。ただし、$x \in X$ のとき、$\{x\}\mathscr{E}C$ でなく、$x\mathscr{E}C$ と書く。

定義 *Selection relations.*
X 上の relation $\mathscr{E}$ は、 total かつ anti-symmetric のとき、selection relation という。そこで、selection relation が linear order となる必要十分条件は、それが transitive となることである。X に対する weak selection f から、次のようにして 順序関係の selection relation $\preccurlyeq_f$ を作ることができる。また、逆もできる。すなわち、selection relation $\mathscr{E} \subset X^2$ に対して、weak selection $f_{\mathscr{E}}$ for X を $f_{\mathscr{E}}(\{x, y\}) = x \leftrightarrow x\mathscr{E}y$ とすればよい。そこで、しばしば、X に対する selection relation を $\preccurlyeq_s$ といった、順序関係らしい記号で書くことにする。また、$x, y \in X$ について、$x \preccurlyeq_s y$ かつ $x \neq y$ という場合は、$x \prec_s y$ と書くことにする。

∗ 総合教育科
平成 23 年 8 月 30 日受理

記号 *Relation intervals.*
selection relation を扱う場合に、linear order の時のように、“intervals”(区間) というものを考える。X 上の selection relation $\preccurlyeq_s$ と $x \in X$ について、

$$(\leftarrow, x]_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X; y \preccurlyeq_s x\} \text{ と}$$
$$[x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X; x \preccurlyeq_s y\}$$

で、$\preccurlyeq_s$-closed intervals を考える。同様にして、

$$(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X; y \prec_s x\} \text{ と}$$
$$(x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X; x \prec_s y\}$$

で、$\preccurlyeq_s$-open intervals を考える。
また、$x, y \in X$ について、:

$$(x, y)_{\preccurlyeq_s} = (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}、$$
$$[x, y]_{\preccurlyeq_s} = [x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y]_{\preccurlyeq_s}、$$
$$(x, y]_{\preccurlyeq_s} = (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y]_{\preccurlyeq_s}、$$
$$[x, y)_{\preccurlyeq_s} = [x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}$$

といったように組み合わせて考える。
注意. selection relation $\preccurlyeq_s$ は、transitive とは限らないから、interval $(x, y)_{\preccurlyeq_s}$ と $(y, x)_{\preccurlyeq_s}$ の両方が non-empty といったこともあり得る。$[x, y]_{\preccurlyeq_s}$ と $[y, x]_{\preccurlyeq_s}$ 等でも同様である。
その例を次のように考えた。
selection relation の定義から totally(全ての元 x, y で、$x < y$ or $y < x$), anti-symmetric(反対称的 $x < y \rightarrow y \not< x$) に気をつけて、4 つの元の集合 $X = \{a, b, x, y\}$ に対して、relation が、$a < b,\ x < y,\ x < a,\ a < y,\ y < b,\ b < x$ ($\leftarrow$ 4 つの元なので、6 個の関係式) をみたすとする。
※ $a < b, x < y$ は逆でも構わない。が、仮に、こうして totally にする。
このとき、$(x, \rightarrow) = \{a\},\ (\leftarrow, y) = \{a\}$ より、$(x, y) = \{a\}$ となる。$(y, \rightarrow) = \{b\},\ (\leftarrow, x) = \{b\}$ なので、$(y, x) = \{b\}$ となる。どちらも non-empty である。

記号
X 上の selection relation $\preccurlyeq_s$ で定める interval においても、X の subset A, B に対し、

$$(\leftarrow, A)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X; y \prec_s A\}、$$
$$(A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X; A \prec_s y\}、$$
$$(A, B)_{\preccurlyeq_s} = (A, \rightarrow)_{\prec_s} \cap (\leftarrow, B)_{\preccurlyeq_s}$$

などと表現を拡張する。

命題
$\preccurlyeq_s$ を X 上の selection relation とする。
$x, y \in X, A \subset X$ について、次が成り立つ。

(1) $x \in (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s} \leftrightarrow x \prec_s y$

(2) $x \in (y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \leftrightarrow y \prec_s x$

(3) $x \in (\leftarrow, A)_{\preccurlyeq_s} \leftrightarrow x \prec_s A \leftrightarrow \forall y \in A(x \prec_s y)$

(4) $x \in (A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \leftrightarrow A \prec_s x \leftrightarrow \forall y \in A(y \prec_s x)$

また、(3),(4) より

$$(\leftarrow, A)_{\preccurlyeq_s} = \bigcap\{(\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}; y \in A\}$$
$$(A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} = \bigcap\{(y \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}; y \in A\}$$

となる。

3. Interval-like topologies.

用語 *Interval-like topologies.*
X 上の selection relation $\preccurlyeq_s$ に対し、family

$$\mathscr{S}_{\preccurlyeq_s} = \{(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s}, (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}; x \in X\}$$

を subbase として “$\preccurlyeq_s$-open” interval topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ を X 上に考え、selection topology という。もし、$\preccurlyeq_s$ が X 上の linear order であれば、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ は、通常の open interval topology となる。

定理 3-1([4]theorem 2.2)
$\preccurlyeq_s$ を X 上の selection relation とする。そのとき、selection topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ は regular である。

ここで、topology が regular(正則) とは、次のように考える。
用語 *regularity.*
space $(X, \mathscr{T})$ が T_1-space であるとき、
topology $\mathscr{T}$ が regular
$\leftrightarrow \forall x{\in}X\ \forall U$:nbd. of $x\ \exists V$:nbd. of x s.t. $\overline{V} \subset U$
注. $\mathscr{T}$ における V の閉包 (closure) を $\overline{V}$ で表した。V の閉包は、$\mathrm{cl}(V)$ と書いたり、topology $\mathscr{T}$ を明示する場合は $\mathrm{cl}_{\mathscr{T}}(V)$ と書いたりする。

定理 3-1 の証明を次のように整理した。

定理 3-1 の証明の概略
$x \in U, U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ を仮定する。$\mathscr{S}_{\preccurlyeq_s}$ が $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ の subbase であるから、non-empty finite subset $\mathscr{F} \subset \mathscr{S}_{\preccurlyeq_s}$ を取って $x \in \bigcap \mathscr{F} \subset U$ とする。
もし、$\mathrm{cl}_{\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}}(\bigcap \mathscr{F}) \subset U$ なら、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ は regular である。そのように $\mathscr{F}$ を直す代わりに、$\mathscr{F}$ から、

$V \subset \bigcap \mathscr{F}$ かつ、$\mathrm{cl}_{\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}}(V) \subset U$ をみたす V を作ることにする。
$\mathscr{F} \subset \mathscr{S}_{\preccurlyeq_s}$ より、$\mathscr{F}$ の要素は、$(\leftarrow, z)$ と $(\rightarrow, z), z \in X$ の形をしている。$(\leftarrow, z)$ の部分と $(\rightarrow, z)$ の二つに分けて、

$$A = \{z \in X; (z, \rightarrow) \in \mathscr{F}\}、$$

$$B = \{z \in X; (\leftarrow, z) \in \mathscr{F}\}$$

とする。

$B = \emptyset$ のとき、$(A, \rightarrow) = \bigcap \mathscr{F}$ である。$A = \emptyset$ のとき、$(\leftarrow, B) = \bigcap \mathscr{F}$ となる。A, B のどちらも non-empty なら、$(A, B) = (A, \rightarrow) \cap (\leftarrow, B) = \bigcap \mathscr{F}$ となる。いずれも $x \in (A, \rightarrow)$ や $x \in (\leftarrow, B)$ に対して、$\mathrm{cl}_{\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}}(V) \subset (A, \rightarrow)$ や $\mathrm{cl}_{\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}}(V) \subset (\leftarrow, B)$ をみたす $V \ni x$ を得られれば良い。

ここでは、A, B の状態を場合分けする代わりに、点 $x \in X$ を次の 3 通りに分けて考える。

用語 *maximal, minimal and cut point.*
$\preccurlyeq_s$ を集合 X の selection relation で、$x \in X$ に対して、
(1) x が $\preccurlyeq_s$-maximal $\leftrightarrow \forall y \in X (y \preccurlyeq_s x)$、
(2) x が $\preccurlyeq_s$-minimal $\leftrightarrow \forall y \in X (x \preccurlyeq_s y)$、
(3) x が $\preccurlyeq_s$-cut $\quad \leftrightarrow \quad \exists a, b \in X (x \in (a, b)_{\preccurlyeq_s})$、
と定める。

注. $x \in X$ のとき、「x が $\preccurlyeq_s$-cut $\leftrightarrow (\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s} \neq \emptyset \neq (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$」であるから、$\preccurlyeq_s$-maximal でも $\preccurlyeq_s$-minimal でもない点を $\preccurlyeq_s$-cut と定めたことになる。

命題 3-2
$\preccurlyeq_s$ が X 上の selection relation で、$x \in U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ とする。
(1) x が $\preccurlyeq_s$-maximal point of X のとき、$\exists A \subset X$ s.t. A : non-empty finite, $x \in (A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ である。
(2) x が $\preccurlyeq_s$-minimal point of X のとき、$\exists B \subset X$ s.t. B : non-empty finite, $x \in (\leftarrow, B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ である。
(3) x が $\preccurlyeq_s$-cut point of X のとき、$\exists A, B \subset X$ s.t. A, B : non-empty finite, $x \in (A, B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ である。

証明. $\mathscr{S}_{\preccurlyeq_s}$ が $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ の subbase であるから、non-empty finite subset $\mathscr{F} \subset \mathscr{S}_{\preccurlyeq_s}$ が $x \in \bigcap \mathscr{F} \subset U$ となるように取れる。
(1) x が $\preccurlyeq_s$-maximal point of X のとき、任意の $y \in X$ に対し $x \notin (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}$ であるから、$x \in \bigcap \mathscr{F}$ となる $\mathscr{F}$ の要素に $(\leftarrow, z)$ の形はあり得ない。よって、$\mathscr{F} \subset \{(y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}; y \in X\}$ である。

故に、$A = \{y \in X; (y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{F}\}$ とすると、A は、X の non-empty finite subset であって

$$x \in (A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$$

$$= \bigcap \{(y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}; y \in A\}$$

$$= \bigcap \mathscr{F} \subset U$$

をみたす。
(2) x が $\preccurlyeq_s$-minimal point of X のとき、任意の $y \in X$ に対し $x \notin (y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ であるから、$x \in \bigcap \mathscr{F}$ となる $\mathscr{F}$ の要素に $(z, \rightarrow)$ の形はあり得ない。よって、$\mathscr{F} \subset \{(\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}; y \in X\}$ である。

故に、$B = \{y \in X; (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{F}\}$ とすると、B は、X の non-empty finite subset であって

$$x \in (\leftarrow, B)_{\preccurlyeq_s}$$

$$= \bigcap \{(\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}; y \in B\}$$

$$= \bigcap \mathscr{F} \subset U$$

をみたす。
(3) x が $\preccurlyeq_s$-cut point of X のとき、$x \in (a_0, b_0)_{\preccurlyeq_s}$ となる $a_0, b_0 \in X$ を取り、

$$A_0 = \{y \in X; (y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{F}\}、$$

$$B_0 = \{y \in X; (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{F}\}、$$

$$A = A_0 \cup \{a_0\}、B = B_0 \cup \{b_0\}$$

とする。

勝手な $y \in A$ を取る。$y = a_0$ なら $y \prec_s x$ である。$y \in A_0$ なら $(y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{F}$ より $x \in (y, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ なので、$y \prec_s x$ となる。故に、$A \prec_s x$ である。

勝手な $z \in B$ を取る。$z = b_0$ なら $x \prec_s z$ である。$z \in B_0$ なら $(\leftarrow, z)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{F}$ より $x \in (\leftarrow, z)_{\preccurlyeq_s}$ なので、$x \prec_s z$ となる。故に、$x \prec_s B$ である。
$A \prec_s x \prec_s B$ となるから、$x \in (A, B)_{\preccurlyeq_s}$ である。

さらに、$(A, B)_{\preccurlyeq_s} = \{z \in X; A \prec_s z \prec_s B\} \subset (A_0, B_0)_{\preccurlyeq_s} \cap (a_0, b_0)_{\preccurlyeq_s} \subset (\bigcap \mathscr{F}) \cap (a_0, b_0)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ となる。

従って、$x \in (A, B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ となる。**(証明終)**

注. 上の証明では、(3) で 2 点 a_0, b_0 を加えたことにより、A_0, B_0 が non-empty となることを示す必要がない。

この命題で得た $(A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}, (\leftarrow, B)_{\preccurlyeq_s}, (A, B)_{\preccurlyeq_s}$ を利用する前に、閉包についての性質を振り返り、topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ における閉集合について見ておく。

命題 3-3
space (X,T) の subset A について、その閉包を $\mathrm{cl}(A)$ と表すとき、$A,B \subset X$ に対し、

$$\mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) \text{ となる。}$$

確認. $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ が closed より $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ である。$A \subset \mathrm{cl}(A), B \subset \mathrm{cl}(B)$ より、$A \cap B \subset \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ なので、
$\mathrm{cl}(A \cap B) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)) = \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$
(確認終)

命題 3-4
$\preccurlyeq_s$ を X 上の selection relation で、$z \in X$ とする。$(\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}$ と $[z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ は、topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ の closed set であり、その閉包は、
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}) = (\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}$,
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}([z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}) = [z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ となる。
さらに、
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((\leftarrow,z)_{\preccurlyeq_s}) \subset (\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}$,
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}) \subset [z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ となる。
確認. selection relation は totall ゆえ、z と異なる任意の $x \in X$ に対し、$x \prec_s z$ または、$z \prec_s x$ であるから、$X \setminus (\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s} = (z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$: open となる。また、$(\leftarrow,z) \subset (\leftarrow,z]$ であるから、$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((\leftarrow,z)_{\preccurlyeq_s}) \subset (\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}$ となる。
$[z,\rightarrow)$: closed と、$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}) \subset [z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ についても同様である。**(確認終)**

命題 3-5([4]lemma 2.3.)
$\preccurlyeq_s$ を set X 上の selection relation で、$x,y \in X$ が $x \prec_s y$ とする。そのとき、
$x \in U, \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}) \subset (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$ をみたす $U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ と、
$y \in V, \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V \cap (x,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}) \subset (x,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ をみたす $V \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ が取れる。
特に、$U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ が得られれば、
$V = X \setminus \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s})$ とすれば良い。
証明. 先ず、$(x,y)_{\preccurlyeq_s} \neq \emptyset$ の場合。$z \in (x,y)_{\preccurlyeq_s}$ をひとつ取る。$x \prec_s z$ なので $x \in (\leftarrow,z)_{\preccurlyeq_s}$ となる。$U = (\leftarrow,z)_{\preccurlyeq_s}$ とすれば、$x \in U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ である。
さらに、$(\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}, (\leftarrow,y]_{\preccurlyeq_s}$ が $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$-closed より
$\mathrm{cl}(U \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s})$
$\subset \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U) \cap \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s})$
$\subset (\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow,y]_{\preccurlyeq_s}$
ここで、$z \prec_s y$ より $y \notin (\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s}$ なので、
$(\leftarrow,z]_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow,y]_{\preccurlyeq_s} \subset (\leftarrow,y]_{\preccurlyeq_s} \setminus \{y\} = (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$
よって、$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}) \subset (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$ となる。

次に、$(x,y)_{\preccurlyeq_s} = \emptyset$ の場合。$\forall z \prec_s y (z \preccurlyeq_s x)$ である。つまり、$(\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s} \subset (\leftarrow,x]_{\preccurlyeq_s}$ となる。そこで、$(\leftarrow,x)_{\preccurlyeq_s} \cup (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s} \subset (\leftarrow,x]_{\preccurlyeq_s}$ となる。逆に、$x \prec_s y$ より $x \in (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$ であるから、$(\leftarrow,x)_{\preccurlyeq_s} \cup (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s} \supset (\leftarrow,x)_{\preccurlyeq_s} \cup \{x\} = (\leftarrow,x]_{\preccurlyeq_s}$ をみたす。よって、$(\leftarrow,x]_{\preccurlyeq_s} = (\leftarrow,x)_{\preccurlyeq_s} \cup (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$ であるから、$(\leftarrow,x]_{\preccurlyeq_s}$ は、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$-open である。$U = (\leftarrow,x]_{\preccurlyeq_s}$ とすれば、U は、$x \in U$ をみたす。
また、U は、$y \notin U$ となる closed set であるから、
$\mathrm{cl}(U \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s})$
$\subset \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U) \cap \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}((\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s})$
$= U \cap (\leftarrow,y]_{\preccurlyeq_s}$
$\subset (\leftarrow,y]_{\preccurlyeq_s} \setminus \{y\} = (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$
よって、$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}) \subset (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$ となる。
(証明終)

定理 3-1 の証明
$x \in U$, $U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ を仮定する。x の 3 つの場合に分けて、$x \in V, \mathrm{cl}_{\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}}(V) \subset U$ をみたす V を作ることにする。
(1) x が $\preccurlyeq_s$-maximal の場合。
命題 3-2 のように、X の non-empty finite subset で、$x \in (A,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ をみたす A を取る。各 $z \in A$ に対し $z \prec_s x$ であるから、命題 3-5 のような開集合 $V(z)$ を取る。つまり、$x \in V(z), \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V(z) \cap (z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}) \subset (z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$ とする。
$V = \bigcap\{V(z) \cap (z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}; z \in A\}$ とすれば、$x \in V$, V : open かつ、
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V) \subset \bigcap\{\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V(z) \cap (z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}); z \in A\}$
$\subset \bigcap\{(z,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s}; z \in A\} = (A,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \subset U$
となるから、この V が求めるものである。
(2) x が $\preccurlyeq_s$-minimal の場合。
命題 3-2 のように X の non-empty finite subset で、$x \in (\leftarrow,B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ をみたす B を取る。各 $y \in B$ に対し $x \prec_s y$ であるから、命題 3-5 のような開集合 $U(y)$ を取る。つまり、$x \in U(y), \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U(y) \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}) \subset (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}$ とする。
$V = \bigcap\{U(y) \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}; y \in B\}$ とすれば、$x \in V$, V : open かつ、
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V) \subset \bigcap\{\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(U(y) \cap (\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}); y \in B\}$
$\subset \bigcap\{(\leftarrow,y)_{\preccurlyeq_s}; y \in B\} = (\leftarrow,B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$
となるから、この V が求めるものである。
(3) x が $\preccurlyeq_s$-cut point の場合。
命題 3-2 のように、X の non-empty finite subset で、$x \in (A,B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ をみたす A,B を取る。$(A,B)_{\preccurlyeq_s} = (A,\rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow,B)_{\preccurlyeq_s}$ であるから、A に対しては (1) のようにして、B に対しては (2) の

ようにして、得られた開集合 V_A, V_B が、

$$x \in V_A,\ \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V_A) \subset (A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}、$$

$$x \in V_B,\ \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V_B) \subset (\leftarrow, B)_{\preccurlyeq_s}$$

をみたすとする。

　このとき、$V = V_A \cap V_B$ とすれば、
$x \in V$, V : open かつ、
$\mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V) \subset \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V_A) \cap \mathrm{cl}_{\preccurlyeq_s}(V_B)$
　$\subset (A, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, B)_{\preccurlyeq_s} = (A, B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$
であるから、この V が求めるものである。**(証明終)**

参考文献

[1] 久保康幸 “finite topology の basis について” 弓削商船紀要 第 32 号 (2009) pp.109–113.

[2] 久保康幸 “finite topology の basis について (2)” 弓削商船紀要 第 33 号 (2010) pp.76–82.

[3] Michael, Ernest “Topologies on spaces of subsets.” Trans. Amer. Math. Soc. 71, (1951) pp.152–182.

[4] V.Gutev, T.Nogura “Weak orderability of topological spaces” Topology Appl. 157, (2010) pp.1249-1274.

[5] 児玉之宏・永見啓応 “位相空間論” 岩波書店 (1974).

[6] 森田紀一 “位相空間論 (岩波全書 331)” 岩波書店 (1981).

[7] 松坂和夫 “集合・位相入門” 岩波書店 (1968).

[8] 青木利夫・高橋渉 “集合・位相空間要論” 培風館 (1979).

[9] “岩波 数学辞典 第 3 版” 岩波書店 (1985).

[10] R. Engelking “General Topology” Revised and completed edition, Helderman Verlag Berlin (1989).

以前の紀要の訂正

これは、「finite topology の basis について」弓削商船紀要 第 32 号 (2009) pp.109–113 の中で、命題 3-1 の注 2 として述べた内容を訂正するものである。番号等は、その時の表示とする。

3.1　命題と定義を再掲する

記号 (Notation 1.4.)
$\mathcal{A}(X) = \{E \subset X; E \neq \emptyset\}$,
$2^X = \{E \subset X \ ; E$ は closed, $E \neq \emptyset\}$
$\quad = \{E \in \mathcal{A}(X) \ ; E$ は closed $\} \subset \mathcal{A}(X)$

記号 (Notation 1.5.)
X の subset の集まり $\{U_i\}_{i\in I}$ に対して、

$$\langle U_i \rangle_{i\in I} = \left\{ E \in 2^X ; \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{i\in I} U_i, \\ E \cap U_i \neq \emptyset \text{ (for all } i{\in}I) \end{array} \right\}$$

と書く。
もし $I = \{1, ..., n\}$ なら、$\langle U_i \rangle_{i\in I}$ を $\langle U_1, ..., U_n \rangle$ と表す。

命題3-1．(Lemma 2.3.1.)
$(\langle U_1, ..., U_n \rangle \subset \langle V_1, ..., V_m \rangle)$
$\rightleftharpoons$
$(\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ かつ $\forall V_j \ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j)$

(注１) ” $\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ ” と ” $\forall V_j \ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j$ ”は、別物である。
(注２) この命題より、$n \leqq m$ のとき $\langle V_1, ..., V_n \rangle \subset \langle V_1, ..., V_m \rangle$ である。

3.2　注２を訂正する

実際には、$n \leqq m$ のとき
$\langle V_1, ..., V_n \rangle \subset \langle V_1, ..., V_m \rangle$ と、
$\langle V_1, ..., V_n \rangle \supset \langle V_1, ..., V_m \rangle$ の、
どちらもみたさない反例ができる。

反例
$V_i = \{i\} (i = 1, \ldots, 4)$ とする。
このとき、$\langle V_1, V_2, V_3 \rangle \ni \{1, 2, 3\}$
かつ $\langle V_1, V_2, V_3 \rangle \not\ni \{1, 2, 3, 4\}$ であるが、
$\langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle \ni \{1, 2, 3, 4\}$
かつ $\langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle \not\ni \{1, 2, 3\}$ となる。

考察
もし、
$(\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ かつ $\forall V_j \ \exists U_i$ s.t. $U_i \subset V_j)$ でなく、
$(\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ かつ $\forall U_j \ \exists V_i$ s.t. $U_i \subset V_j)$ であれば、注２が言えたが、そうではなかった。