Weak selection の continuity

久保 康幸 ∗

Continuity of weak selections

Yasuyuki Kubo ∗

Abstract

In this paper, I study continuity of weak selections.

1. 記号などの準備

今回の紀要も、[5] V.Gutev, T.Nogura "Weak orderability of topological spaces" Topology Appl. 157 (2010) 1249-1274. を読んだメモである。今回も、定理の後に (　) で、元の論文の番号を付けることがある。

昨年までの紀要で使った記号や用語をふり返っておく。

T_1-space X に対し, X の non-empty closed subsets 全体を $\mathscr{F}(X)$ とする。$\mathscr{F}(X)$ 上の位相として Vietoris 位相 τ_V がよく知られ, 通常は $(\mathscr{F}(X), \tau_V)$ を the Vietoris hyperspaces of X とする。

また、断らない限り、spaces はすべて infinite かつ Hausdorff とし、subset $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}(X)$ は、Vietoris topology τ_V を考えた hyperspaces $(\mathscr{F}(X), \tau_V)$ の subspace として考える。

定義 (selections)
map $f : \mathscr{D} \to X$ が $\mathscr{D}$ に対する selection とは、$\forall S \in \mathscr{D}(f(S) \in S)$ であることとする。

selection $f : \mathscr{D} \to X$ が continuous とは、それが relative Vietoris topology τ_V on $\mathscr{D}$ に関して continuous であることとする。簡単のため f が Vietoris continuous, とか τ_V-continuous, と言って f が continuous with respect to the topology τ_V を指すことがある。

記号　selection に関連して, $\mathscr{F}(X)$ の特別な部分集合を次のように記す:
$\mathscr{F}_n(X) = \{S \subset X; 1 \leqq |S| \leqq n\}$,
$[X]^n = \{S \subset X; |S| = n\}, n \geqq 1$.

X は、$[X]^1 = \mathscr{F}_1(X)$ と同一視でき、実際, X は $(\mathscr{F}_1(X), \tau_V)$ と homeomorphic である。

X が orderable (or, linearly orderable) とは、X の位相が、X 上の ordering $\preccurlyeq$ から X 上に生成した open interval topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq}$ と一致することである。この場合, the order $\preccurlyeq$ on X が compatible for the topology of X, または単に, a compatible order for X という。ただし、すべての $\preccurlyeq$-open intervals

$(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq} = \{y \in X; y \prec x\}$ と
$(x, \rightarrow)_{\preccurlyeq} = \{y \in X; x \prec y\}, x \in X,$

により $\mathscr{T}_{\preccurlyeq}$ に対する、subbase が構成される.

定義 (weak selection)
$\mathscr{F}_2(X)$ に対する selection f のことを weak selection for X という.

記号 selection $f : \mathscr{F}_2(X) \to X$ に対し、X 上の order-like relation $\preccurlyeq_f$ を $x, y \in X$ に対し、

$$x \preccurlyeq_f y \iff f(\{x, y\}) = x$$

として定める。

また、$x \preccurlyeq_f y$ かつ $x \neq y$ であることを $x \prec_f y$ と書く。

set X に対し subset $\mathscr{E} \subset X^2$ を binary relation, または単に relation on X という. X 上の relation $\mathscr{E}$ に対し, $x\mathscr{E}y$ と書いて $\langle x, y\rangle \in \mathscr{E}$ を表す. $\mathscr{E}$ の inverse relation $\mathscr{E}^{-1}$ は、$x\mathscr{E}^{-1}y \Leftrightarrow y\mathscr{E}x$ によって定める.

X の relation $\mathscr{E}$ は、X の subset の relation へ拡張できる。再び, $\mathscr{E}$ と表し, $B, C \subset X$ に対して, $B\mathscr{E}C \Leftrightarrow B \times C \subset \mathscr{E}$ と定める. つまり, $B\mathscr{E}C \Leftrightarrow \forall y \in B, \forall z \in C(y\mathscr{E}z)$ とする. これに関し, 点 $x \in X$ では, $\{x\}\mathscr{E}C$ の代わりに, $x\mathscr{E}C$ と書くなど記号を単純にする.

定義 (selection relations)
X の relation $\mathscr{E}$ が total かつ anti-symmetric であるとき、selection relation という.

注意： selection relation は、線形順序 $\rightleftharpoons$ transitive となる. weak selection f for X に合わせ

∗ 総合教育科

平成 24 年 9 月 1 日受理

て、順序風の relation $\preccurlyeq_f$ を定めたものが selection relation となる. 逆も言える。つまり, selection relation $\mathscr{E} \subset X^2$ により weak selection $f_{\mathscr{E}}$ for X を $f_{\mathscr{E}}(\{x,y\}) = x \iff x\mathscr{E}y$ として定める。そこで, weak selections for X は正に selection relations on X であり、しばしば X の selection relation を $\preccurlyeq_s$ と書く. また, 点 $x, y \in X$ について, $x \prec_s y$ は、$x \preccurlyeq_s y$ かつ $x \neq y$ であることを表す.

定義 (relation intervals)
selection relation を扱うときも線形順序で考えるような "intervals"(区間) を考える。selection relation $\preccurlyeq_s$ on X と $x \in X$ について次のようにする:

$$(\leftarrow, x]_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X : y \preccurlyeq_s x\},$$

$$[x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X : x \preccurlyeq_s y\},$$

これらを $\preccurlyeq_s$-closed intervals と呼ぶ. 同様に, $\preccurlyeq_s$-open intervals を考える:

$$(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X : y \prec_s x\},$$

$$(x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} = \{y \in X : x \prec_s y\}.$$

そして, 点 $x, y \in X$ について, intervals を組み合わせて次のようにする:

$$(x, y)_{\preccurlyeq_s} = (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s},$$

$$[x, y]_{\preccurlyeq_s} = [x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y]_{\preccurlyeq_s},$$

$$(x, y]_{\preccurlyeq_s} = (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y]_{\preccurlyeq_s},$$

$$[x, y)_{\preccurlyeq_s} = [x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} \cap (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}.$$

命題 1.1.
$\preccurlyeq_s$ を X 上の selection relation, A, B を X の nonempty subset とするとき、

$$(A, B)_{\preccurlyeq_s} = \{z \in X ; A \prec_s z \prec_s B\}$$
$$= \bigcap \{(a, b)_{\preccurlyeq_s} ; \langle a, b \rangle \in A \times B\}$$

となる。

定義 (interval-like topology)
X 上に selection relation $\preccurlyeq_s$ が与えられたとき, family

$$\mathscr{S}_{\preccurlyeq_s} = \{(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s}, (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s} ; x \in X\}$$

を subbase として 自然に "$\preccurlyeq_s$-open" interval topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ が X 上に定まり selection topology と呼ぶ. 実際, X 上に linear order $\preccurlyeq_s$ が与えられたとき、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ は、通常の open interval topology となる.

定義 (maximal, minimal, cut)
$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ の base について述べるため, 次のように言う。

$x \in X$ が the $\preccurlyeq_s$-maximal element of X とは, $\forall y \in X (y \preccurlyeq_s x)$ となることである.

$x \in X$ が the $\preccurlyeq_s$-minimal element of X とは, $\forall y \in X (x \preccurlyeq_s y)$ となることである.

その他の点 $x \in X$ を $\preccurlyeq_s$-cut と言う.

注意. $x \in X$ が $\preccurlyeq_s$-cut とは, $(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s} \neq \emptyset \neq (x, \rightarrow)_{\preccurlyeq_s}$、言い換えれば、$\exists a, b \in X (x \in (a, b)_{\preccurlyeq_s})$ ということである.

後のために、昨年の紀要で命題 3-2(3) として取り上げた、次の命題を用意しておく。

命題 1.2.
$\preccurlyeq_s$ が X 上の selection relation 、x が $\preccurlyeq_s$-cut point of X で、$x \in U \in \mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$ とする。
そのとき、$\exists A, B \subset X$ s.t. A, B : non-empty finite, $x \in (A, B)_{\preccurlyeq_s} \subset U$ である。

2. selection の continuity

space X に対し、$\Lambda : X^2 \to X^2$ を次のように定めた map とする

$$\Lambda(x, y) = \langle y, x \rangle, \ \langle x, y \rangle \in X^2. \qquad (2.1)$$

Λ は homeomorphism となる.

定義
space X 上の binary relation $\mathscr{E}$ が closed (または, open) とは、$\mathscr{E} \subset X^2$ が closed (または, open) なこととする.

命題 2.1.([5] prop.2.4.)
空間 X 上の selection relation を $\preccurlyeq_s$ とするとき、
(1) $\preccurlyeq_s$: closed $\Leftrightarrow$ $\prec_s$: open.
(2) $\preccurlyeq_s$: closed $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ ($x \prec_s y \to \exists U, V \subset X$, open s.t. $x \in U, y \in V$ and $U \prec_s V$).

証明. (1) : $\preccurlyeq_s$ が closed のとき、その inverse relation $(\preccurlyeq_s)^{-1} = \Lambda(\preccurlyeq_s)$ も closed である。($\leftarrow \Lambda$ が homeomorphism) そこで、$\prec_s = X^2 \setminus (\preccurlyeq_s)^{-1}$ より $\prec_s$ が open となる。また、この関係式より、$\prec_s$ が open のとき、$\preccurlyeq_s$ が closed となる。
(2) : (1) より、$\prec_s$: open $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ ($x \prec_s y \to \exists\, U, V \subset X$, open s.t. $x \in U, y \in V$ and $U \prec_s V$) を示せば良い。

$\prec_s$: open を言い換えれば、
$\forall \langle x, y \rangle \in \prec_s \exists U \times V \subset X^2$ s.t. $\langle x, y \rangle \in U \times V \subset \prec_s$

ところで、$x \neq y$ のとき、$\langle x, y \rangle \in \prec_s \Leftrightarrow x \prec_s y$ であるから、更に言い換えて、

$\forall x,y\in X(x\prec_s y \ \rightarrow\ \exists U\times V\subset X^2$ s.t. $\langle x,y\rangle\in U\times V \subset\prec_s)$

また、$\langle x,y\rangle \in U\times V \Leftrightarrow x\in U, y\in V$ かつ $U\times V \subset \prec_s \Leftrightarrow \forall u\in U, v\in V(u\prec_s v) \Leftrightarrow U\prec_s V$ であるから、更に言い換えて、

$\forall x,y\in X\ (x\prec_s y \rightarrow \exists U\times V\subset X^2$ s.t. $x\in U, y\in V$ かつ $U\prec_s V)$ **(証明終)**

命題 2.2.([5] th.2.5.)
空間 $(X,\mathscr{T})$ と X 上の linear order $\preccurlyeq$ に対し、次は同値:
(a) $\preccurlyeq$: $\mathscr{T}$-closed.
(b) $x,y\in X,\ x\prec y$ のとき, $\exists U,V\subset X, \mathscr{T}$-open sets s.t. $x\in U, y\in V, U\prec V$.
(c) $x,y\in X,\ x\prec y$ のとき, $\exists U,V\subset X, \mathscr{T}$-open sets s.t. $x\in U, y\in V, x\prec V, U\prec y$.
(d) $\mathscr{T}_{\preccurlyeq}\subset\mathscr{T}$.

証明. (a)$\leftrightarrow$(b) : これは命題 2.1(2) から言える。(closed $\Leftrightarrow$ $\mathscr{T}$-closed)

(b)$\rightarrow$(c) : $x\in U, y\in V, U\prec_s V$ のとき、$x\prec_s U, V\prec_s y$ であるから。

(c)$\rightarrow$(d) : (c) を仮定し、$x\in X$ を取る。$y\in(x,\rightarrow)_{\preccurlyeq}$ のとき、仮定 (c) より $\exists V\subset X, \mathscr{T}$-open s.t. $(y\in V, \forall z(x\prec z))$ となる。このとき、$V\subset(x,\rightarrow)_{\preccurlyeq}$ である。これは、$y\in(x,\rightarrow)_{\preccurlyeq}$ のとき $\exists V\subset X, \mathscr{T}$-open s.t. $y\in V\subset(x,\rightarrow)_{\preccurlyeq}$ が言えたことになるので、$(x,\rightarrow)_{\preccurlyeq}\in\mathscr{T}$ である。同様に、$(\leftarrow,x)_{\preccurlyeq}\in\mathscr{T}$ であるから、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq}\subset\mathscr{T}$ である。

(d)$\rightarrow$(b) : (d) を仮定し、(b) を示すため、$x,y\in X$, $x\prec y$ とする。

$(x,y)_{\preccurlyeq}\neq\emptyset$ なら、$z\in(x,y)_{\preccurlyeq}$ を取り、$U=(\leftarrow,z)_{\preccurlyeq}$, $V=(z,\rightarrow)_{\preccurlyeq}$ とする。

$(x,y)_{\preccurlyeq}=\emptyset$ なら、$U=(\leftarrow,y)_{\preccurlyeq}$, $V=(x,\rightarrow)_{\preccurlyeq}$ とする。

どちらの場合も、$x\in U$, $y\in V$, $U\prec V$ となる。$U\in\mathscr{T}_{\preccurlyeq}, V\in\mathscr{T}_{\preccurlyeq}, \mathscr{T}_{\preccurlyeq}\subset\mathscr{T}$ であるから、(b) が示された。

こうして、(a)$\leftrightarrow$(b)$\rightarrow$(c)$\rightarrow$(d)$\rightarrow$(b) が示されたので、(a), (b), (c), (d) は同値である。**(証明終)**

selection $g:[X]^2\rightarrow X$ は $f(\{x\})=x$ ($x\in X$) と定めることにより、$\mathscr{F}_2(X)$ の selection f へ拡張される。また、selection relation $\preccurlyeq_f$ が selection f for $\mathscr{F}_2(X)$ に対応するとき, relation $\prec_f$ は $f\restriction[X]^2$ に対応している.

一方, f が $\mathscr{F}_2(X)$ に対する selection であるなら、各 open $V\subset X$ に対し、$\langle V\rangle\cap\mathscr{F}_2(X)\subset f^{-1}(V)$ となる。

注意 (1) : $\restriction$ は写像の制限を表す記号で $|$ を使うこともある。
(2) : $\langle V\rangle=\{E\in\mathscr{F}(X); E\subset V, E\cap V\neq\emptyset\}$ であるから、$E\in\langle V\rangle\cap\mathscr{F}_2(X)$ のとき、$E\subset V$ である。また、f が selection なので、$f(E)\in E$ となる。そこで、$f(E)\in V$ である。このことより、$E\in f^{-1}(V)$ となる。

命題 2.3.
f を $\mathscr{F}_2(X)$ に対する selection とする。
f : continuous $\Leftrightarrow$ $f\restriction[X]^2$: continuous

証明. f : continuous $\Rightarrow$ $f\restriction[X]^2$: continuous は当然なので、f : continuous $\Leftarrow$ $f\restriction[X]^2$: continuous を示す。

$f:\mathscr{F}_2(X)\rightarrow X$ が continuou であることを示すには、「$\forall z\in\mathscr{F}_2(X)\ \forall V$:open $(z\in V\subset X \rightarrow \exists U$:open s.t. $z\in U\subset\mathscr{F}_2(X), f(U)\subset V)$」をいえば良い。これは、$U=V\cap\mathscr{F}_2(X)$ とすれば、$U\subset f^{-1}(V)$ となるから $f(U)\subset V$ となって示される。**(証明終)**

この命題により、$[X]^2$ と $\mathscr{F}_2(X)$ とで selection を考えるとき continuity に違いはなく、次の命題のように、closed relation について、weak selection の continuity に直して扱う。

命題 2.4.([5] th.2.6.)
空間 $(X,\mathscr{T})$ に対する weak selection を f とする。次は同値:
(a) selection relation $\preccurlyeq_f$ が $\mathscr{T}$-closed.
(b) $x,y\in X,\ x\prec_f y$ のとき, $\exists U,V\subset X, \mathscr{T}$-open sets s.t. $x\in U, y\in V$, $U\prec_f V$.
(c) f が $\tau_{V(\mathscr{T})}$-continuous.

証明. 命題 2.1 より (a)$\leftrightarrow$(b) なので、(b)$\leftrightarrow$(c) を示せばよい。

(b)$\rightarrow$(c) : 異なる 2 点 $x,y\in X$ を取り、$x\prec_f y$ とする。(b) より得られる U,V を取る。$W\subset X$ が x を含む $\mathscr{T}$-open とするとき、

$\langle U\cap W, V\rangle=\{E\in\mathscr{F}(X)\ ;\ E\subset(U\cup W)\cup V$, $E\cap(U\cap W)\neq\emptyset$, $E\cap V\neq\emptyset\}$ であるから、$a\neq b$ が $\{a,b\}\in\langle U\cap W,V\rangle$ のとき、
$a\in U\cap W, b\in V\ \cdots(1)$ または、
$b\in U\cap W, a\in V\ \cdots(2)$ となる。
(1) のとき、$a\prec_f b$ となるから $f(\{a,b\})=a\in U\cap W\subset W$
(2) のとき、$b\prec_f a$ となるから $f(\{a,b\})=b\in U\cap W\subset W$
どちらにしても、$f(\{a,b\})\in W$ である。よって、$f(\langle U\cap W,V\rangle)\subset W$ となる。

これは、$\forall W$:$\mathscr{T}$-open $\exists W'$: open in $\mathscr{F}(X)$ s.t. $f(W') \subset W$ を示すから、(c) がいえる。
(c)→(b) : 異なる 2 点 $x, y \in X$ を取り、$x \prec_f y$ とする。$\mathscr{T}$ は Hausdorff なので、$x \in W_x, y \in W_y$ をみたす disjoint な $\mathscr{T}$-open sets を取る。f が点 $\{x,y\}$ で $\tau_{V(\mathscr{T})}$-continuous で、$f(\{x,y\}) = x$ であるから、$\exists W'$: open in $\mathscr{F}(X)$ s.t. $f(W') \subset W_x$ であり、$\exists U, V$: open s.t. $\{x,y\} \in \langle U, V\rangle \subset W'$、このとき、$x \in U \subset W_x, y \in V \subset W_y$ と仮定してよい。$\cdots$(注)
ここで、$s{\in}U, t{\in}V$ なら $f(s,t){\in}W_x$ より、$f(s,t) \notin W_y$ であるから $f(s,t) \notin V$ よって、$f(s,t) \neq t$ となるから $f(s,t) = s$ つまり $s \prec_f t$ となる。これより、$U \prec_f V$ となって、(b) が示された。**(証明終)**

注意： (c)→(b) の証明中、もし、$U \not\subset W_x, V \not\subset W_y$ なら、U, V を小さく取り直せばよい。[1] 命題 3-1 より $U \subset U', V \subset V' \to \langle U, V\rangle \subset \langle U', V'\rangle$ となるから証明に支障がない。

命題 2.4(b) を考えれば、次の結果がいえる。

命題 2.5([5] corollary 2.8.)
space $(X, \mathscr{T})$ に対する continuous weak selection f は, $\mathscr{T}$ よりも finer な X 上の topology に関しても, continuous である.

3. dense weak selection

記号. infinite countable set X に対して、
$$[X]^{<\omega} = \bigcup\{[X]^n : 1 \leqslant n < \omega\},$$
$$[X]^{\omega} = \{S \subset X : |S| = \omega\}.$$

定義. (MAD)
family $\mathscr{A} \subset [X]^\omega$ が almost disjoint とは、二つの異なる $A, B \in \mathscr{A}$ は、必ず $A \cap B$: finite なこと.

almost disjoint family $\mathscr{A} \subset [X]^\omega$ は、この性質について maximal であるとき、すなわち、$B \in [X]^\omega \setminus \mathscr{A}$ に対し、必ず $A \cap B$: infinite となる $A \in \mathscr{A}$ が取れるとき、maximal almost disjoint (MAD) であるという。

定義. ($\preccurlyeq_s$-decisive)
$\preccurlyeq_s$ を X 上の selection relation で、$\mathscr{M}$ を X の nonempty subset の family とする.

$\mathscr{M}$ が $\preccurlyeq_s$-decisive とは、二つの異なる $C, D \in \mathscr{M}$ は、必ず $C \prec_s D$ または $D \prec_s C$ となることである。

$\mathscr{M}$ が alomost $\preccurlyeq_s$-decisive とは、二つの異なる $P, Q \in \mathscr{M}$ には、必ず finite subset $F_P, F_Q \subset X$ が取れて、$F_P \neq \emptyset \neq F_Q$ かつ、 $F_P \prec_s F_Q$ または $F_Q \prec_s F_P$ となることである。

定義. (tree, chain, branch)
partially ordered set $(T, \preccurlyeq)$ が tree とは, 各 $t \in T$ に対し、$\{s \in T : s \prec t\}$ が well-ordered となることである.

$\pi \subset T$ が $\preccurlyeq$ により linearly ordered であるとき、π を tree $(T, \preccurlyeq)$ の chain という。

T の maximal chain π を T の branch(枝) といい、T の branch 全体を $\mathscr{B}(T)$ と表す。

定義. (Cantor tree)
少なくとも 2 つの異なる要素を持つ集合 S に対し、写像 $t : N \to S$ の全体を S^N で表し、
$$S^{<\omega} = \bigcup\{S^n : n < \omega\}$$
とする。

$t \in S^{<\omega}$ に対し, $\mathsf{Dom}(t)$ を t の domain(定義域) とする。

$S^{<\omega}$ 上に、 partial order $\sqsubseteq$ を定める ;
$s, t \in S^{<\omega}$ に対し、
$$s \sqsubseteq t \Leftrightarrow \mathsf{Dom}(s) \subset \mathsf{Dom}(t), t \restriction \mathsf{Dom}(s) = s.$$

このとき、$(S^{<\omega}, \sqsubseteq)$ の branch $\beta{\in}\mathscr{B}(S^{<\omega})$ と $\beta^*{\in}S^\omega$ は、$\beta{=}\{\beta^*{\restriction}n\,;\,n{<}\omega\}$ なら同等と考えることにより $\mathscr{B}(S^{<\omega}) = S^\omega$ となる。特に、$\mathscr{B}(S^{<\omega}) = 2^\omega$ であり、tree $(2^{<\omega}, \sqsubseteq)$ を Cantor tree という。

定義. (dense weak selection)
selection $\varphi : [X]^2 \to X$ が dense in X とは、2 つの disjoint な、任意の $F, G \in [X]^{<\omega}$ に対し、$F \prec_s z \prec_s G$ となる点 $z \in X$ が存在すること。

注意： 命題 1.1 より、
$F \prec_s z \prec_s G$ となる点 $z \in X$ が存在
$\Leftrightarrow (F, G)_{\preccurlyeq_s} \neq \emptyset$
となる。

命題 3.1([5] prop.3.3.)
X は, infinite set, φ は, dense weak selection for X, $\preccurlyeq$ は linear order on X とする。そのとき、
$\exists x, y, z \in X$ s.t. $x \prec_s z \prec_s y$ かつ $z \prec \{x, y\}$
証明. $a, b \in X, a \prec_s b$ とする。φ が dense in X より、$\{b\} \prec_s c \prec_s \{a\}$ すなわち $b \prec_s c \prec_s a$ な $c \in X$ が取れる。次に $x = \min_{\preccurlyeq}\{a, b, c\}$ とする。

$z = c$ のとき、$b \prec_s c \prec_s a$ であるから、$x = b, y = a$ とすればよい。

$z = b$ のとき、$a \prec_s b \prec_s c \prec_s a$ より、$a \prec_s b \prec_s c$ であるから、$x = a, y = c$ とすればよい。

$z = a$ のとき、$b \prec_s c \prec_s a \prec_s b$ より、$c \prec_s a \prec_s b$ であ

るから、$x = c, y = b$ とすればよい。**(証明終)**

記号.
selection $\varphi : [X]^2 \to X$ に対し,

$$\mathscr{D}(\varphi) = \{A \subset X; \varphi\restriction[A]^2 \text{ is dense in } A\}$$

とする。

ただし、$\varphi\restriction[A]^2$ is dense in A とは, 2 つの disjoint な任意の $F, G \in [A]^{<\omega}$ に対し、$F \prec_s z \prec_s G$ となる点 $z \in A$ が存在すること。

定義. (partition)
set X に対し、$\mathscr{P} = \{P_0, P_1\}$ が、その partition であるとは、$P_0 \cap P_1 = \emptyset, P_0 \cup P_1 = X$ をみたすこととする。

命題 3.2([5] prop.3.4.)
dense selection $\varphi : [X]^2 \to X$ に対して, 次が成り立つ:
(a) $\mathscr{P} = \{P_0, P_1\}$ が X の partition であるとき,
$P_i \in \mathscr{D}(\varphi)$ for some $i < 2$,
(b) $F, G \in [X]^{<\omega}$ が disjoint であるとき,
$\{x \in X \ ; \ F \prec_\varphi x \prec_\varphi G\} \in \mathscr{D}(\varphi)$.

証明. (a) を偽として, partition $\mathscr{P} = \{P_0, P_1\}$ が $P_0, P_1 \notin \mathscr{D}(\varphi)$ とする。i=0, 1 について、$\varphi\restriction[P_i]^2$ が dense でないから, 2 つの disjoint な $F_i, G_i \in [P_i]^{<\omega}$ が取れて、$P_i \cap (F_i, G_i) = \emptyset$ である。

一方、P_0, P_1 が disjoint なので、$F = F_0 \cup F_1$ と $G = G_0 \cup G_1$ が disjoint となる。このとき、φ が dense in X であるから、ある $z \in X = P_0 \cup P_1$ が存在して、$F \prec_s z \prec_s G$ となる。

$F = F_0 \cup F_1$ かつ $G = G_0 \cup G_1$ および、$F \prec_s z \prec_s G$ より、i=0, 1 に対し、$F_i \prec_s z \prec_s G_i$ となるから、$z \in (F_i, G_i)_{\prec_s}$ となる。

$z \in P_0$ のとき $z \in P_0 \cap (F_0, G_0)_{\prec_s}$ であり、$z \in P_1$ のとき $z \in P_1 \cap (F_1, G_1)_{\prec_s}$ であり、どちらの場合も $P_i \cap (F_i, G_i) = \emptyset$ (i=0, 1) に矛盾する。よって、(a) が成り立つ。

(b) を偽として、disjoint set $F, G \in [X]^{<\omega}$ が、$B = \{x \in X \ ; \ F \prec_\varphi x \prec_\varphi G\} \notin \mathscr{D}(\varphi)$ とする。(a) により $X \setminus B \in \mathscr{D}(\varphi)$ となる。$x \not\prec_s x$ であるから、$\forall x \in F (F \not\prec_s x)$ かつ $\forall x \in G (x \not\prec_s G)$ となるので、$\forall x \in F (x \notin B)$ かつ $\forall x \in G (x \notin B)$ となる。よって、$F, G \subset X \backslash B$ であるから、φ が dense(in $X \backslash B$) であることを、この F, G に使って、$F \prec_\varphi z \prec_\varphi G$ をみたす $z \in X \backslash B$ を得る。このとき、B の定義より、$z \in B$ となって、矛盾する。よって、(b) が成り立つ。**(証明終)**

4. selection **の別の** continuity

第 2 節で、linear order $\preccurlyeq$ について (命題 2.2)、weak selection f について (命題 2.4)、の命題を扱ったが、次の命題 4.1 では、selection relation $\preccurlyeq_s$ について扱い、その差に注意する。

命題 4.1([5] prop.4.1.)
空間 $(X, \mathscr{T})$ に対する selection relation を $\preccurlyeq_s$ とする。次は同値:
(a) $x, y \in X$, $x \prec_s y$ のとき, $\exists U, V \subset X, \mathscr{T}$-open sets s.t. $x \in U, y \in V, x \prec_s V, U \prec_s y$.
(b) $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s} \subset \mathscr{T}$.
証明. (a)→(b) は、明らか。(b)→(a) を示すため、(b) を仮定し、$x \prec_s y$ とする。$V = (x, \to)_{\preccurlyeq_s}$ とすると、$x \prec_s V$ であり、$x \prec_s y$ より $y \in V$ となる。また、$U = (\leftarrow, y)_{\preccurlyeq_s}$ とすると、$U \prec_s y$ であり、$x \prec_s y$ より $x \in U$ となる。$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s} \subset \mathscr{T}$ より、U, V は、$\mathscr{T}$-open である。**(証明終)**

命題 2.4 と命題 4.1 より次を得る。

命題 4.2([5] corollary 4.2.)
space $(X, \mathscr{T})$ 上の $\mathscr{T}$-closed relation となる $\preccurlyeq_s$ では、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s} \subset \mathscr{T}$ であり、特に、各 $x \in X$ で、$(\leftarrow, x)_{\preccurlyeq_s}$, $(x, \to)_{\preccurlyeq_s} \in \mathscr{T}$ となる。

注意 : selection relation は、linear order と限らないから、命題 2.2 のような $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s} \subset \mathscr{T}$ から $\mathscr{T}$-closed とか $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_s}$-closed は言えない。

定義. (separately continuous)
f を space $(X, \mathscr{T})$ の weak selection とする。
f が separately continuous であるとは、$\mathscr{T}_{\preccurlyeq_f} \subset \mathscr{T}$ であることとする。

注意 : 命題 2.4 と命題 4.2 より continuous なら separelely continuous である。上の注意にあるように、その逆は成り立たない。

定義. (properly continuous)
f を space $(X, \mathscr{T})$ の weak selection とする。
f が properly continuous であるとは、
(i) f が separately continuous,
(ii) selection relation $\preccurlyeq_f$ が $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_f}$-closed,
の２条件を満たすこととする。

注意 : X の topology を $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_f}$ で考え、$\mathscr{F}_2(X)$ に $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_f}$ から得られる Vietoris topology を考えるとき、命題 2.4 より、separately continuous な weak selection f が properly continuous となるための必要十分条件は、f が continuous となることである。

命題 2.5 より、properly continuous は continuou である。

矢印で示すと、“continuous $\rightarrow$ separately continuous”, “properly continuous $\rightarrow$ separately continuous”, “properly continuous $\rightarrow$ continuous” となる。

最後に、continuous と、第３節で扱った dense との関係をみる。

命題 4.3([5] prop.4.6.)
infinite set Z に対する dense weak selection を f とするとき、Z の各点が $\preccurlyeq_f$-cut となる。

証明. $z \in Z$ を取り、これが $\preccurlyeq_f$-cut となることを示せばよい。Z が infinite なので、もう１点 $x \in Z \setminus \{z\}$ を取る。disjoint な $\{z\}, \{x\}$ に対し、f が dense より、$x \prec_f a \prec_f z$ と $z \prec_f b \prec_f x$ をみたす２つの点 $a, b \in Z$ を取れる。$a \prec_f z \prec_f b$ となるから $z \in (a, b)_{\prec_f}$ であり、z は、$\preccurlyeq_f$-cut となる。**(証明終)**

命題 4.4([5] prop.4.7.)
infinite set Z に対する dense weak selection を f とするとき、f は、selection topology $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_f}$ に関して continuous ではない。特に、Z が space のとき、f は、properly continuous ではない。

証明. f が $\mathscr{T}_{\preccurlyeq_f}$ に関して continuous であると仮定して矛盾を導く。

異なる２点 $x, y \in Z$ を取り、$x \prec_s y$ とする。命題 4.3 より２点 x, y が $\preccurlyeq_f$-cut であるから、命題 2.1, 命題 2.4 より non-empty finite disjoint な $A_x, B_x \subset Z$ と non-empty finite disjoint な $A_y, B_y \subset Z$ が取れて、

$$x \in (A_x, B_x)_{\preccurlyeq_f}, y \in (A_y, B_y)_{\preccurlyeq_f},$$
$$\text{かつ } (A_x, B_x)_{\preccurlyeq_f} \prec_f (A_y, B_y)_{\preccurlyeq_f} \tag{4.1}$$

とできる。

ここで、命題 3.2 より、$f \restriction (A_x, B_x)_{\preccurlyeq_f}$ が dense であるから、$(A_x, B_x)_{\preccurlyeq_f}$ が無限集合である。故に、$s \in (A_x, B_x)_{\preccurlyeq_f} \setminus A_y (\neq \emptyset)$ が取れる。そのとき、A_y と $B_y \cup \{s\}$ は、disjoint であり、f が dense より、$A_y \prec_f t \prec_f B_y \cup \{s\}$ をみたす $t \in Z$ が取れる。$t \prec_f B_y \cup \{s\}$ であるから、$t \prec_f s$ となる。

一方、$s \in (A_x, B_x)_{\preccurlyeq_f}$ かつ $t \in (A_y, B_y)_{\preccurlyeq_f}$ であるから、(4.1) より $s \prec_f t$ となる。これは矛盾である。**(証明終)**

参考文献

[1] 久保康幸 “finite topology の basis について” 弓削商船紀要 第 32 号 (2009) pp.109–113.

[2] 久保康幸 “finite topology の basis について (2)” 弓削商船紀要 第 33 号 (2010) pp.76–82.

[3] 久保康幸 “weak selection から作る topology について” 弓削商船紀要 第 34 号 (2011) pp.60–65.

[4] Michael, Ernest “Topologies on spaces of subsets.” Trans. Amer. Math. Soc. 71, (1951) pp.152–182.

[5] V.Gutev, T.Nogura “Weak orderability of topological spaces” Topology Appl. 157, (2010) pp.1249-1274.

[6] 児玉之宏・永見啓応 “位相空間論” 岩波書店 (1974).

[7] 森田紀一 “位相空間論 (岩波全書 331)” 岩波書店 (1981).

[8] 松坂和夫 “集合・位相入門” 岩波書店 (1968).

[9] 青木利夫・高橋渉 “集合・位相空間要論” 培風館 (1979).

[10] “岩波 数学辞典 第 3 版” 岩波書店 (1985).

[11] R. Engelking “General Topology” Revised and completed edition, Helderman Verlag Berlin (1989).