$\mathrm{cosec}^2 x$ の 積分

久保 康幸 ＊

integral calculus of $\mathrm{cosec}^2 x$

Yasuyuki Kubo ＊

Abstract

In this paper, I calculate $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\tan x}$ by substitution.

1. 目的

本校の数学の授業において、私が担当する場合、三角関数は、$\sin x, \cos x, \tan x$ の計算を中心としており、$\mathrm{cosec}\ x, \sec x, \cot x$ は、それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆数として紹介するだけであり、ほとんど扱わない。そのため、三角関数の微分公式として紹介するのは、$\sin x, \cos x, \tan x$ の 3 つの微分公式を紹介するのが自然である。

しかし、私の授業では、三角関数の微分公式として、$\sin x, \cos x, \tan x,\ \frac{1}{\tan x}$ の 4 つを紹介している。それは、微分 $(\sin x)', (\cos x)', (\tan x)'$ が、それぞれ、$\cos x, -\sin x, \frac{1}{\cos^2 x}$ であることから、その逆演算として積分の公式 $\int \cos x dx, \int \sin x dx, \int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ を紹介するとき、合わせて $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ を知りたくなるのが自然と考えるからである。

授業で紹介するとき、できれば積分の性質を紹介する中で、計算の工夫により $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ の計算ができればよいと考える。しかし、この計算のために後で紹介する置換積分はレベルが高いと考えるので、$(\tan x)'$ の逆演算として紹介している。

この考察の目的は、$(\tan x)'$ の逆演算として考えない場合、どれほど $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ の計算が複雑であるかを確認することである。

なお、積分定数は省略している。

2. 計算の準備

置換積分の準備をする。$z = \tan \dfrac{x}{2}$ とするとき、次の関係式が成り立つ。

$$\textbf{(1)}:\quad \boldsymbol{\sin x = \frac{2z}{1+z^2}},\ \boldsymbol{\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}},\ \boldsymbol{\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1+z^2}}$$

確認. $A = \dfrac{x}{2}$ とするとき、$x = 2A$ かつ $z = \tan A$ である。

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 2A \\ &= 2\sin A\cos A \\ &= 2\tan A\cos^2 A \\ &= 2\tan A\left(\frac{1}{1+\tan^2 A}\right) \\ &= \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 2A \\ &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= \left(1-\tan^2 A\right)\cos^2 A \\ &= \left(1-\tan^2 A\right)\frac{1}{1+\tan^2 A} \\ &= \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned}$$

$z = \tan \dfrac{x}{2} \to \dfrac{x}{2} = \mathrm{Tan}^{-1} z \to x = 2\ \mathrm{Tan}^{-1} z$

この両辺を z で微分すると、$\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{2}{1+z^2}$

注意. $\mathrm{Tan}^{-1} z$ は、アークタンジェントを表す。

(確認終)

この関係式を利用して、次の 2 つの式を導く。

$$\textbf{(2)}:\quad \boldsymbol{\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \tan \frac{x}{2}}$$

$z = \tan \dfrac{x}{2}$ として、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\cos x}dx &= \int \frac{1}{1+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \times \frac{2}{1+z^2}dz \\ &= \cdots \\ &= \int 1dz \\ &= z \\ &= \tan \frac{x}{2}\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \tan \frac{x}{2}$ となる。

＊ 総合教育科

平成 24 年 9 月 1 日受理

$$\textbf{(3)}:\int \frac{1}{1-\cos x}dx = -\cot\frac{x}{2}$$

$z=\tan\dfrac{x}{2}$ として、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-\cos x}dx &= \int \frac{1}{1-\dfrac{1-z^2}{1+z^2}}\times\frac{2}{1+z^2}dz\\ &= \cdots\\ &= \int\frac{1}{z^2}dz\\ &= -\frac{1}{z}\\ &= -\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\left(=-\cot\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}dx = -\cot\frac{x}{2}$ となる。

3. $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$ の計算

(2),(3) を利用して、

$$\textbf{(4)}:\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\tan x}$$

を次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin^2 x}dx &= \int\frac{1}{1-\cos^2 x}dx\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tan^2\dfrac{x}{2}-1}{\tan\dfrac{x}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}\right)\\ &= \frac{\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}\\ &= \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\tan x}$ となる。

4. 補足 1

(4) の計算には、§2 で準備した関係式 (1) のうち、$\sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$ を使っていないことを補足しておく。また、

(2) : $\displaystyle\int\frac{1}{1+\cos x}dx$ と (3) : $\displaystyle\int\frac{1}{1-\cos x}dx$

に類似の式として

$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx$ と $\displaystyle\int\frac{1}{1-\sin x}dx$

を計算し、式 (2),(3) から式 (4) を導いたのと同様にして、

$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$

を導けるのではないかという発想が起こる。ここでは、これらを計算してみる。

$$\textbf{(5)}:\int\frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}$$

$z=\tan\dfrac{x}{2}$ として、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sin x}dx &= \int\frac{1}{1+\dfrac{2z}{1+z^2}}\times\frac{2}{1+z^2}dz\\ &= \cdots\\ &= \int\frac{2}{(1+z)^2}dz\\ &= \frac{-2}{1+z}\\ &= \frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}$ となる。

$$\textbf{(6)}:\int\frac{1}{1-\sin x}dx = \frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}$$

$z=\tan\dfrac{x}{2}$ として、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1-\sin x}dx &= \int\frac{1}{1-\dfrac{2z}{1+z^2}}\times\frac{2}{1+z^2}dz\\ &= \cdots\\ &= \int\frac{2}{(1-z)^2}dz\\ &= \frac{2}{1-z}\\ &= \frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}\end{aligned}$$

よって、$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}$ となる。

(5),(6) を利用して、

$$\textbf{(7)}:\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$$

を次のように計算する。

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \int\frac{1}{1-\sin^2 x}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}+\frac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}\right) \\
&= \frac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x
\end{aligned}
$$

よって、$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$ となる。

5. 補足 2

ここまでの置換積分は、$z = \tan^{-1}\dfrac{x}{2}$ としたが、ここから、別の置換積分により、見かけの違う計算結果を得る様子を紹介しておく。ただし、比較する計算には、

$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$ と $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\tan x}$

を使うことがある。

準備.

$z = \tan^{-1}\dfrac{x}{2}$ としたとき、§2 の関係式 (1) を利用する。

比較する置換積分では、

$s = \sin x$ (このとき、$ds = \cos x\ dx$)

または、

$t = \cos x$ (このとき、$dt = -\sin x\ dx$)

とする。

問 (1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$

(解 1-1)

$z = \tan\dfrac{x}{2}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int\frac{1+z^2}{1-z^2}\times\frac{2}{1+z^2}dz \\
&= \int\frac{1}{1-z^2}dz \\
&= \log\left|\frac{2}{1-z^2}\right| \\
&= \log\left|\frac{1+z}{1-z}\right| \\
&= \log\left|\frac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}\right|
\end{aligned}
$$

(解 1-2)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \\
&= \int\frac{1}{1-s^2}ds \qquad \leftarrow s = \sin x \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+s}{1-s}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)
\end{aligned}
$$

※ $1-\sin x \geqq 0, 1+\sin x \geqq 0$ より $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} \geqq 0$ なので、最後に絶対値 $|*|$ を括弧 $(*)$ にした。

(考察 1)

加法定理より $\dfrac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$

一方、半角の公式より

$$
\begin{aligned}
\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) &= \tan^2\left(\frac{\dfrac{\pi}{2}+x}{2}\right) \\
&= \frac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)} \\
&= \frac{1+\sin x}{1-\sin x}
\end{aligned}
$$

よって、二つの答は等しい。

問 (2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx$

(解 2-1)

$z = \tan\dfrac{x}{2}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int\frac{1}{\dfrac{2z}{1+z^2}}\times\frac{2}{1+z^2}dz = \int\frac{1}{z}dz \\
&= \log|z| \\
&= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|
\end{aligned}
$$

(解 2-2)

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx \\
&= \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx \\
&= \int\frac{-1}{1-t^2}dt \qquad \leftarrow t = \cos x \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)
\end{aligned}
$$

※ $1-\cos x \geqq 0, 1+\cos x \geqq 0$ より $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \geqq 0$ なので、最後に絶対値 $|*|$ を括弧 $(*)$ にした。

(考察 2)

$$\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\times 2\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{2}\log\left(\tan^2\frac{x}{2}\right)$$

よって、半角の公式 $\tan^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ より、二つの答は等しい。

問 (3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}dx$

(解 3-1)

$z = \tan\dfrac{x}{2}$ として、式 (2) より、与式 $= \tan\dfrac{x}{2}$

(解 3-2)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int \frac{1}{s^2}ds \qquad \leftarrow s = \sin x \\
&= \frac{-1}{\tan x} + \frac{1}{s} \\
&= \frac{-1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x}
\end{aligned}$$

(考察 3)

§6 で紹介するように $\tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

一方、$\dfrac{-1}{\tan x} + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{-\cos x}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

よって、二つの答は等しい。

問 (4) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}dx$

(解 4-1)

$z = \tan\dfrac{x}{2}$ として、式 (3) より、与式 $= -\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}$

(解 4-2)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{s^2}ds \qquad \leftarrow s = \sin x \\
&= \frac{-1}{\tan x} - \frac{1}{s} \\
&= -\left(\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x}\right)
\end{aligned}$$

(考察 4)

§6 で紹介するように $\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

一方、$\dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

よって、二つの答は等しい。

問 (5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

(解 5-1)

$z = \tan\dfrac{x}{2}$ として、式 (5) より、与式 $= \dfrac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}$

(解 5-2)

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx \\
&= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{t^2}ds \qquad \leftarrow t = \cos x \\
&= \tan x - \frac{1}{t} \\
&= \tan x - \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

(考察 5)

$x = \dfrac{\pi}{3}$ を二つの答に代入すると、

$$\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} = \sqrt{3}-3,\ \tan x - \frac{1}{\cos x} = \sqrt{3}-2$$

であり、$\dfrac{-2}{1+\tan\dfrac{x}{2}} \neq \tan x - \dfrac{1}{\cos x}$ となる。

しかし、$x = 2A$ とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} + 1 &= \frac{-2}{1+\tan A} + 1 \\
&= \frac{-2(1-\tan A)}{1-\tan^2 A} + 1 \\
&= \frac{-2(\cos^2 A - \sin A\cos A)}{\cos^2 A - \sin^2 A} + 1 \\
&= \frac{-2\cos^2 A + 2\sin A\cos A}{\cos 2A} + 1 \\
&= \frac{-(1+\cos 2A) + \sin 2A}{\cos 2A} + \frac{\cos 2A}{\cos 2A} \\
&= \frac{\sin 2A - 1}{\cos 2A}
\end{aligned}$$

一方、$\tan x - \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = \dfrac{\sin 2A - 1}{\cos 2A}$

よって、二つの答は不定積分の解として等しい。

問 (6) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}dx$

(解 6-1)

$z = \tan\dfrac{x}{2}$ として、式 (6) より、与式 $= \dfrac{2}{1-\tan\dfrac{x}{2}}$

(解 6-2)

$$\text{与式} = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{1}{t^2} ds \qquad \leftarrow t = \cos x$$
$$= \tan x + \frac{1}{t}$$
$$= \tan x + \frac{1}{\cos x}$$

(考察 6)

$x = \frac{\pi}{3}$ を二つの答に代入すると、

$$\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} = \sqrt{3}+3,\ \tan x + \frac{1}{\cos x} = \sqrt{3}+2$$

であり、$\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} \neq \tan x + \frac{1}{\cos x}$ となる。

しかし、$x = 2A$ とすると、

$$\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1-\tan A} - 1$$
$$= \frac{2(1+\tan A)}{1-\tan^2 A} - 1$$
$$= \frac{2(\cos^2 A + \sin A\cos A)}{\cos^2 A - \sin^2 A} - 1$$
$$= \frac{2\cos^2 A + 2\sin A\cos A}{\cos 2A} - 1$$
$$= \frac{(1+\cos 2A)+\sin 2A}{\cos 2A} - \frac{\cos 2A}{\cos 2A}$$
$$= \frac{\sin 2A + 1}{\cos 2A}$$

一方、$\tan x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \frac{\sin 2A + 1}{\cos 2A}$

よって、二つの答は不定積分の解として等しい。

6. 計算に利用した式について

利用した式変形の中から、いくつかを選んで確認しておく。

分数式の積分 (解 1-1, 1-2, 2-2 用)

通常、$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$ が、教科書で紹介されるが、ここでは、

$$\int \frac{-1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{x^2-1} dx$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$
$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = -\int \frac{1}{x^2-1} dx$$
$$= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

と考えた。

よって、

$$\boldsymbol{\int \frac{-1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$$
$$\boldsymbol{\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$$

三角関数の相互関係 (考察 1 用)

加法定理より、

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$

よって、

$$\boldsymbol{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}}$$

三角関数の相互関係 (考察 3, 4 用)

$x = 2A$ とすると、

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos 2A}{\sin 2A}$$
$$= \frac{2\sin^2 A}{2\sin A\cos A} \quad \leftarrow \text{分子 : 半角の公式、分母 : 2 倍角の公式}$$
$$= \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$= \tan A$$

また、

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$
$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

よって、

$$\boldsymbol{\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}}$$

三角関数の相互関係 (考察 5, 6)

$x = 2A$ とする。

$$\frac{\sin x - 1}{\cos x} = \frac{\sin 2A - 1}{\cos 2A}$$
$$= \frac{-(1-2\sin A\cos A)}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$
$$= \frac{-(\cos^2 A + \sin^2 A - 2\sin A\cos A)}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$
$$= \frac{-(\cos A - \sin A)^2}{(\cos A - \sin A)(\cos A + \sin A)}$$
$$= \frac{-(\cos A - \sin A)}{\cos A + \sin A}$$
$$= \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$$
$$= \frac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$$

また、

$$\begin{aligned}\frac{\sin x+1}{\cos x}&=\frac{\sin 2A+1}{\cos 2A}\\&=\frac{2\sin A\cos A+1}{\cos^2 A-\sin^2 A}\\&=\frac{2\sin A\cos A+\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A-\sin^2 A}\\&=\frac{(\cos A+\sin A)^2}{(\cos A-\sin A)(\cos A+\sin A)}\\&=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}\\&=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{\sin x-1}{\cos x}=\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\tan\frac{x}{2}+1},\ \frac{\sin x+1}{\cos x}=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$$

これを見直して、

$$\boldsymbol{\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}}$$

$$\boldsymbol{\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}}$$

※ 最後の二つは利用してないが、考察 5, 6 に表れた式が、考察 1 に表れたり、考察 3, 4 の式で $\sin x, \cos x$ を入れ替えた式になったりと興味深い。

参考文献

[1] 矢野健太郎・石原　繁 編 “基礎の数学 (改訂版)” 裳華房 (1989).

[2] 矢野健太郎・石原　繁 編 “微分積分 (改訂版)” 裳華房 (1991).

[3] 斎藤　斉・高遠節夫ほか “新訂 微分積分 I” 大日本図書 (2003).

[4] 田代嘉宏 “工科の数学 微分積分学” 森北出版 (1993).