微分と積分の関係

久保 康幸 ＊

Differential calculus and integral calculus

Yasuyuki Kubo ＊

Abstract
In this paper, I used a polygonal line for the explanation of operation of the integral calculus being inverse operation of the differential operation.

1. はじめに

積分を面積から定義したとき、積分が微分の逆演算であることを体験（←ボディ）させる試み [1] を 2013 年 8 月に渡部敬　さん(注1) が数理解析研究所で発表した。その質疑応答で、積分が微分の逆演算であることのソウル（←理解？）はどうする考えかというのがあり、折れ線によるアイデアが意外に普及していない事を感じて、まとめることにした。高校数学の内容であるから、積分はリーマン積分またはリーマン型の積分のことを指す。

今から説明を試みている結論そのものは、微分積分の基本定理として、大学生向けあるいは高専向け教科書（例えば [2] ）にも書かれている。高校では積分を逆演算として定義し、その結果、積分によって面積を求めることができるという認識が薄くなっているというのが、前述した渡部敬　さんの講演の背景にある。その状況は、参考文献に挙げた [3] からも伺える。[3] おいても、面積を求める計算としての積分が、微分の逆演算であることの説明を試みている。その説明は、「速度の積分が距離」、「距離の微分が速度」という考えが理解できることを前提としている。しかし、ここでは、そういった知識も利用しないで、折れ線により、積分が微分の逆演算であることの説明を試みる。

2. 積分について

まず、積分を区分求積法による面積の計算として定義する。

関数 $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ において、$f(x) \geqq 0$ であると仮定する。区間 $[a, b]$ を n 等分の微小区間に分けるとき、区間の幅が $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ となる。このとき、次のような、長方形の面積の和を $S(n)$ とする。

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

ただし、$x_i = a + i * \Delta x \ (i = 0, \ldots, n)$ であって、$b = a + n * \Delta x$ (注2)

このとき、$n \to \infty$ なら $\Delta x \to 0$ であって、$\lim_{n\to\infty} S(n)$ がある値に定まれば、区間 $[a, b]$ の $f(x)$ の面積を $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(n)$ とする。なお、微小区間は、一般に等間隔と限らないが、後の説明のため、等間隔で考える。

3. 微分について

次に、微分について復習する。授業で微分を導入するときは通常、関数を $f(x)$ で表すが、すでに被積分関数として $f(x)$ を使っており、微分される関数を $F(x)$ とする。

関数 $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ は、次のように定義される。

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

また、$x = a$ における微分係数 $F'(a)$ は、次のように定義される。

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$$

4. 微分係数から元の関数を復元

4.1 準備

積分の定義に用いた n と x_i を使って、次の n 個の点 $x = x_i$ における微分係数と微分係数の近似値 m_i を考える。

微分係数の定義に現れる変数 h を 0 に近づける途中で Δx で止めたものを m_i とする。

＊ 総合教育科

平成 25 年 9 月 30 日受理

$$F'(x_i) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_i+h)-F(x_i)}{h}$$

$$m_i = \frac{F(x_i+\Delta x)-F(x_i)}{\Delta x} = \frac{F(x_{i+1})-F(x_i)}{\Delta x}$$
$(i=0,\ldots,n)$

n を十分に大きな、ある自然数とする。十分に大きな自然数とは、次の条件を満たすものとする。

(1) $S(n) \fallingdotseq \lim_{n\to\infty} S(n) = \int_a^b f(x)dx$

(2) $n*(F'(x_i)-m_i) \fallingdotseq 0\ (i=0,\ldots,n)$

4.2 関数の復元

$m_i\ (i=0,\ldots,n)$ の定め方より、

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} m_i*\Delta x &= \sum_{i=0}^{n-1}\Big(F(x_{i+1})-F(x_i)\Big)\\ &= F(x_n)-F(x_0)\\ &= F(b)-F(a)\end{aligned}$$

よって、

$$F(b) = F(a)+\sum_{i=0}^{n-1} m_i*\Delta x$$

同様に、$a \leqq x_j \leqq b$ となる $x_j\ (j=1,\ldots,n)$ について、

$$F(x_j) = F(a)+\sum_{i=0}^{j-1} m_i*\Delta x$$

が成り立つ。

n が十分に大きな自然数であるから、区間 $[a,b]$ の至る所の点 x で、微分係数から、元の関数を復元できたと考えてよい。

5. 復元した関数と積分の関係

4.2 の最初に出てくる式を再び考える。今度は、条件 (2) より

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i*\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} F'(x_i)*\Delta x$$

であるから

$f(x)=F'(x)$ のときには、

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i*\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)*\Delta x$$

となる。

この式は積分の定義で現れた式 $S(n)$ と同じであり、$S(n)=F(b)-F(a)$

よって、条件 (1) より

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq F(b)-F(a)$$

であるから

$$F(b) \fallingdotseq F(a)+\int_a^b f(x)dx$$

となる。

微分係数から元の関数を復元したのと同様の考え方により、

$$F(x_j) = F(a)+\sum_{i=0}^{j-1} m_i*\Delta x$$

より

$$F(x_j) \fallingdotseq F(a)+\int_a^{x_j} f(x)dx$$

が得られる。

これにより、区間 $[a,b]$ の至る所の点 t で、微分係数の和を使う代わりに、導関数 $f(x)=F'(x)$ の積分計算で得た面積を $F(a)$ に加えることにより、元の関数を復元できたと考えてよい。つまり、

$$F(t) = F(a)+\int_a^t f(x)dx$$

と考えてよい。

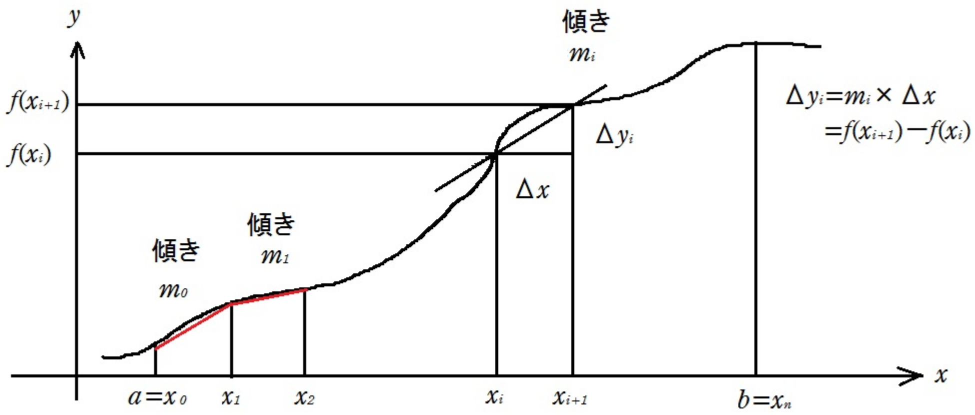
このように、面積の計算として定義された積分計算が、微分の逆演算であることが分かる。

6. おわりに

面積の計算として積分を定義したときにも、カバリエリの原理があるように、積分演算子の線形性が得られる。しかし、私の授業では、積分の定義だけは面積で紹介するものの、すぐに微分の逆演算であることを紹介し、微分の線形性から積分の線形性を説明している。

ここで考えたことは、似たことを考える人は多いと思う。本校の南郷先生に本稿の案を見せたところ、[4] を紹介して頂いた。助言に感謝します。

最後のページに、ここで紹介した内容を理解するための図を入れておく。



Notes

(注 1)　東京理科大学大学院　科学教育研究科

(注 2)　長方形の面積の和を $S(n)$ の代わりに

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$$

としてもよい。関数 $f(x)$ が増加関数であるとき、$S(n)$ が下限和で、その極限が下積分、$S_1(n)$ が上限和で、その極限が上積分となる。今は、$S(n)$ で積分を考える。

参考文献

[1] 渡部敬　・清水克彦 “数値積分を取り入れた積分法の教材開発～表計算ソフトを用いて～”RIMS 研究集会「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」(2013) での発表。

[2] 斎藤　斉・高遠節夫ほか “新訂 微分積分 I” 大日本図書 (2003).

[3] 大田邦郎 “高等学校の積分指導におけるいくつかの問題” 北海道大学大学院教育学研究院紀要, 第 108 巻 (2009)pp.21-29.

[4] 長沼伸一郎 “物理数学の直感的方法 第 2 版” 通商産業研究社 (2007).