SINNETについて
—不変量$a_k(X)$—

雙知　延行*

Notes on SINNET
－invariant a_k(X)－

Nobuyuki Sochi*

Abstract

We studied the metric invariant a_k(X) $= \min\max\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} dist(x, x_l)$. In this paper, we play the game "SINNET " by applying this invariant to Sphere.

１．ゲーム「SINNET」について

ｋ人対ｋ人で対戦ゲームをする。

最初に、偶数人対偶数人、つまり、２ｐ人対２ｐ人（ｐは自然数）で対戦ゲームをする場合を考える。まず、一方のチームの１人（先攻）が玉を投げ落とし、落ちた瞬間に落ちて動かない玉の位置まで相手の２ｐ人が同時に同じ速さで最短距離で拾いに行き（あるいは、２ｐ人のうち何人かは玉の方向に向かわなくても良いし、別の方向に向かっても良いものとする)、玉を拾い、最初に拾った人が拾った玉を投げて、同様に相手チームの２ｐ人（あるいは、そのうちの数人）が拾いに行き、以下同様にゲームを続ける。なるべく遠くに投げて、２ｐ人のうち１人が拾ったら拾ったプレイヤーの移動した距離数量だけ玉を落とした相手チームが得点する。得点がある得点（例えば、大円１０周分）に先に達した方を１ゲーム勝ちとして、先攻後攻を入れ替えてゲームを続ける。４ｎ人は全員同じ速さとする。

手始めに、球面上でこのゲームを行う。便宜上、球面は半径が１のｎ次元単位球面S^nとし、無色透明のスケルトンで、玉が落ちたら玉までの距離が$\pi/2$より近いか遠いかがプレイヤーに区別がつくものとする。ｎ次元単位球面はｎ－１次元単位球面の spherical suspension である。ここで、spherical suspension とは、ｎ－１次元単位球面からの距離が$\pi/2$となる２点を極として、その２点と球面上の点を測地線で結び、球面の距離を入れてｎ次元単位球面とすることである。各プレイヤーから玉の落下点までの最短測地線によって張られたネットの中の球面（Sphere）における TENNIS のダブルス（？）のようなこのゲームを SINNET（S in net）と名付ける。

まずは、２人対２人で２次元球面S^2上で対戦する。次に、２人対２人でｎ次元球面S^n（ｎ≧２）上で対戦する。その次に、２ｐ人対２ｐ人（ｐは自然数）で２次元球面S^2上で対戦し、次に、２ｐ人対２ｐ人でｎ次元球面S^n（ｎ≧２）上で対戦する。

奇数人対奇数人の場合も２ｐ人対２ｐ人の場合と同様の条件で考える。つまり、一方のチームの１人が玉を投げ落とし、落ちた瞬間に落ちて動かない玉の位置まで相手の２ｐ－１人が同時に同じ速さで最短距離で拾いに行き（あるいは、２ｐ－１人のうち何人かは玉の方向に向かわなくても良いし、別の方向に向かっても良いものとする)、玉を拾い、最初に拾った人が拾った玉を投げて、同様に相手チームの２ｐ－１人（あるいは、そのうちの数人）が拾いに行き、以下同様にゲームを続ける。なるべく遠くに投げて、２ｐ－１人のうち１人が拾ったら拾ったプレイヤーの移動した距離数量だけ玉を落とした相手チームが得点する。得点がある得点に先に達した方を１ゲーム勝ちとする。合計４ｎ－２人は全員同じ速さとする。この様に、２ｐ－１人対２ｐ－１人（ｐは自然数）で２次元球面S^2上で対戦し、２ｐ－１人対２ｐ－１人でｎ次元球面S^n（ｎ≧２）上でも対戦する。

*総合教育科
平成 26 年 11 月 30 日受理

最後に他の空間（例えば、射影空間やアレクサンドロフ空間）において考える。

2．不変量 a_k(X)について

空間 X において k 個の点から任意の点 x までの距離の平均の最大値が最小となるような k 個の点の配置での値を a_k(X) と定義する。つまり、$a_k(\mathrm{X}) = \min\max\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} dist(x,x_l)$ と定義する。まずは、X が n 次元単位球面 S^n の場合を考える。

2．1　k＝２p のとき

n 次元単位球面 S^n においては、k が偶数（k＝２p）のとき、$a_k(S^n) = \frac{1}{2}\pi$ になることが分かっている[(2)(3)]。k が偶数のとき、$a_k(S^n)$ が実現される k 個の点の配置は p 組の２個の点がそれぞれ対蹠点（距離 π の点）のペアとなるときと分かっている[(2)(3)]。このとき、x は任意の点である。

例として図１を挙げる。

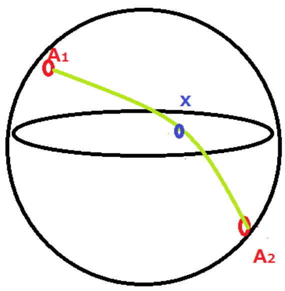

図１　a_2（S^2）が実現された配置

2．2　k＝２p－１のとき

k が奇数（k＝２p－１）のとき、$a_k(S^n) = \frac{2p^2-2p+1}{(2p-1)^2}\pi$ となり、k が奇数のとき、$a_k(S^n)$ が実現される k 個の点の配置は大円上に k 個の点が等間隔に並んだときで、x は k 個の点のうちの任意の１点の対蹠点のときと分かっている[(2)(3)]。

例として図２を挙げる。

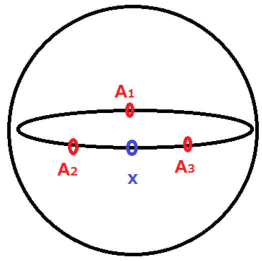

図２　a_3（S^2）が実現された配置

3．　球面上の２人対２人の対戦

3．1　S^2 上の対戦

S^2 上で A チームのメンバー A_1 と A_2 が B チームのメンバー B_1 と B_2 と２人対２人で対戦する。まず、A_1 が玉を投げたとする。B_1 と B_2 からなるべく遠くに投げるために、２人からの距離の平均の最大値を考える。B_1 と B_2 はその最大値が最小となる配置を考えて、その配置に移動しておく。つまり、$a_2(S^2)$ を考えることになる。上の結果より、その値は π/2 で B_1 と B_2 の２人は球面上の対蹠点の位置にいれば良いことになる。

図３で A_1 がどこに投げても、B チームのメンバーからの最短距離は π/2 以下となるので、B_1 と B_2 の２人からの距離が同じ π/2 となる点（お見合い点と呼ぶ）を狙うと良い。B チームは、B_1 と B_2 のうち x により近い方（お見合い点の場合は任意）が玉を取りに行き、他方は相方の対蹠点に移動して次に備えておけば良い。

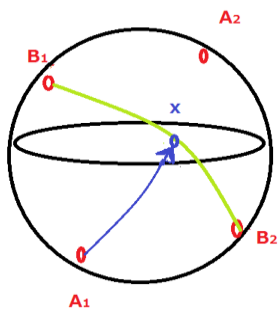

図３　S^2 上の対戦

３．２　S^n上の対戦

S^n上でＡチームのメンバーA_1とA_2がＢチームのメンバーB_1と B_2と２人対２人で対戦する。まず、A_1が玉を投げたとする。B_1とB_2からなるべく遠くに投げるために、２人からの距離の平均の最大値を考える。B_1と B_2はその最大値が最小となる配置を考えて、その配置に移動しておく。つまり、$a_2(S^n)$を考えることになる。上の結果より、その値は$\pi/2$でB_1と B_2の２人は球面上の対蹠点の位置にいれば良いことになる。

図４でA_1がどこに投げても、Ｂチームのメンバーからの最短距離は$\pi/2$以下となるので、B_1とB_2の２人からの距離が同じ$\pi/2$となる点（お見合い点）を狙うと良い。Ｂ チームは、B_1と B_2のうちｘにより近い方（お見合い点の場合は任意）が玉を取りに行き、他方は相方の対蹠点に移動して次に備えておけば良い。

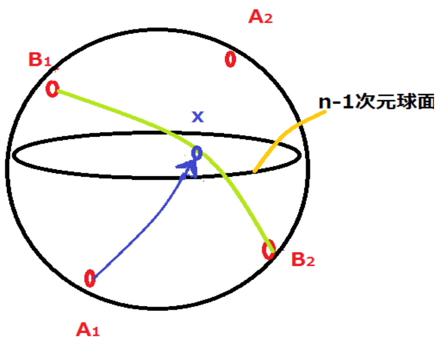

図4　S^n上の対戦

４．球面上の２ｐ人対２ｐ人の対戦

４．１　S^2上の対戦

S^2上でＡチームのメンバーA_1～A_{2p}がＢチームのメンバーB_1～B_{2p} と２ｐ人対２ｐ人で対戦するとする。まず、A_1が玉を投げたとする。B_1～B_{2p}からなるべく遠くの距離に投げるために、２ｐ人からの距離の平均の最大値を考える。B_1～B_{2p} はその最大値が最小となる配置を考えて、その配置に移動しておく。つまり、$a_{2p}(S^2)$を考えることになる。上の結果より、その値は$\pi/2$でＢチームのｐペアの２人は球面上の対蹠点にそれぞれいれば良いことになる。Ｂチームは、B_1～B_{2p} のうちｘにより近い人（お見合い点の場合は任意）が玉を取りに行き、その相方は対蹠点の位置に移動して次に備えておけば良い。

２つの対蹠点から始めて spherical suspension を２回とった時に、初めの２点も含めて、それぞれの極の２点に順に配置をしていけば、$\pi/2$よりもさらに小さくすることができる。

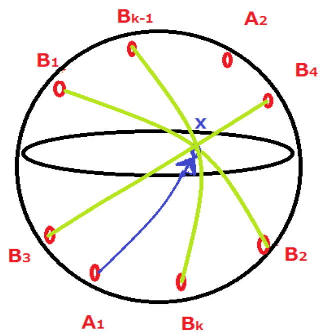

図5　S^2上の対戦

４．２　S^n上の対戦

S^n上でＡチームのメンバーA_1～A_{2p}がＢチームのメンバーB_1～B_{2p} と２ｐ人対２ｐ人で対戦するとする。まず、A_1が玉を投げたとする。B_1～B_{2p}からなるべく遠くの距離に投げるために、２ｐ人からの距離の平均の最大値を考える。B_1～B_{2p}はその最大値が最小となる配置を考えて、その配置に移動しておく。つまり、$a_{2p}(S^n)$を考えることになる。上の結果より、その値は$\pi/2$でＢチームのｐペアの２人は球面上の対蹠点にそれぞれいれば良いことになる。Ｂチームは、B_1～B_{2p} のうちｘにより近い人（お見合い点の場合は任意）が玉を取りに行き、その相方は対蹠点の位置に移動して次に備えておけば良い。

２つの対蹠点から始めて spherical suspension をとることを繰り返した時に、初めの２点も含めて、それぞれの極の２点に順に配置をしていけば、$\pi/2$よりもさらに小さくすることができる。

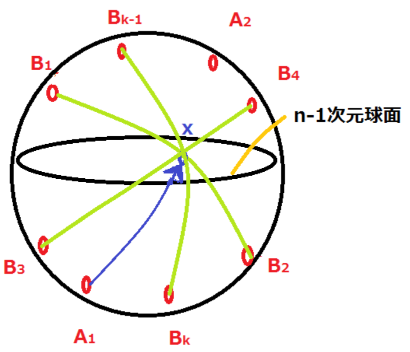

図６　S^n上の対戦

５．球面上の１人対１人の対戦

５．１　S^2上の対戦

S^2上でＡチームのメンバーA_1〜A_{2p-1}がＢチームのメンバーB_1〜B_{2p-1}と２ｐ－１人対２ｐ－１人で対戦する場合も考えてみる。ｐ＝１の場合、つまり、１人対１人の場合は、上の結果より、$a_1(S^2)=\pi$となるので、相手の対蹠点に玉を落とせば良い。

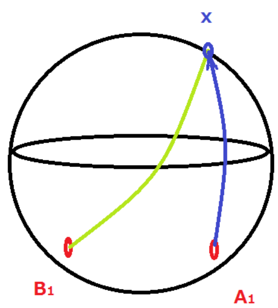

図７　S^2上の対戦

５．２　S^n上の対戦

S^n上でＡチームのメンバーA_1〜A_{2p-1}がＢチームのメンバーB_1〜B_{2p-1}と２ｐ－１人対２ｐ－１人で対戦するときのｐ＝１の場合、つまり、１人対１人の場合は、上の結果より、$a_1(S^n)=\pi$となるので、相手の対蹠点に玉を落とせば良い。

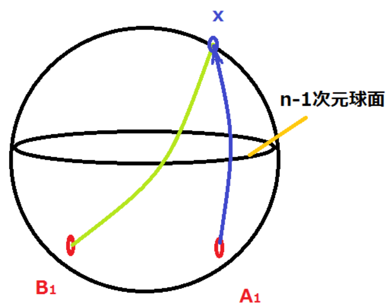

図８　S^n上の対戦

６．球面上の２ｐ－１人対２ｐ－１人の対戦

６．１　S^2上の対戦

S^2上でＡチームのメンバーA_1〜A_{2p-1}がＢチームのメンバーB_1〜B_{2p-1}と２ｐ－１人対２ｐ－１人で対戦するときのｐ≧２の場合を考える。まず、A_1が玉を投げたとする。B_1〜B_{2p-1}からなるべく遠くの距離に投げるために、２ｐ－１人からの距離の平均の最大値を考える。B_1〜B_{2p-1}はその最大値が最小となる配置を考えて、その配置に移動しておく。つまり、$a_{2p-1}(S^2)$を考えることになる。上の結果より、その値の$\frac{2p^2-2p+1}{(2p-1)^2}\pi$は$\pi/2$を超えていて、Ｂチームのｐ－１ペアの２人が球面上の対蹠点にそれぞれいれば、２ｐ人対２ｐ人の対戦とほぼ同様にしてより近い人（お見合いの場合は関係する任意の人）が$\pi/2$以下の距離で玉を拾いに行けば良いことになる。

あるいは、奇数の場合の$a_{2p-1}(S^2)$の結果通りに、大円上に等間隔の配置にいたとしても、誰かが$\pi/2$以下の距離で玉を拾いに行けば良いことになる。

２つの対蹠点から始めて spherical suspension を２回とった時に、初めの２点も含めて、それぞれの極の２点に順に配置をしていけば、$\pi/2$よりもさらに小さくすることができる。

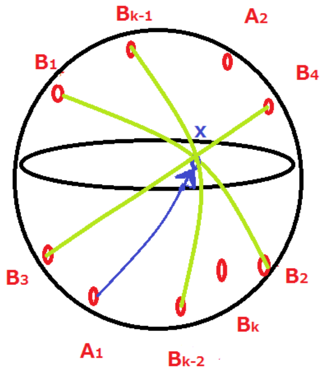

図９　S^2上の対戦

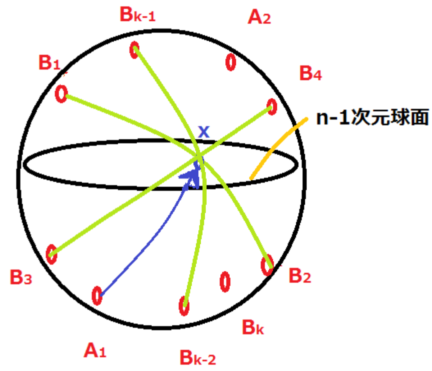

図１０　S^n上の対戦

６．２　S^n上の対戦

S^n上で A チームのメンバーA_1～A_{2p-1}が B チームのメンバーB_1～B_{2p-1}と２ｐ－１人対２ｐ－１人で対戦するときのｐ≧２の場合を考える。 A_1が玉を投げたとする。B_1～B_{2p-1}からなるべく遠くの距離に投げるために、２ｐ－１人からの距離の平均の最大値を考える。B_1～B_{2p-1}はその最大値が最小となる配置を考えて、その配置に移動しておく。つまり、$a_{2p-1}(S^n)$を考えることになる。上の結果より、その値の$\frac{2p^2-2p+1}{(2p-1)^2}\pi$はπ/２を超えていて、B チームのｐ－１ペアの２人が球面上の対蹠点にそれぞれいれば、２ｐ人対２ｐ人の対戦とほぼ同様にしてより近い人（お見合いの場合は関係する任意の人）がπ/２以下の距離で玉を拾いに行けば良いことになる。

あるいは、奇数の場合の$a_{2p-1}(S^n)$の結果通りに、大円上に等間隔の配置にいたとしても、より近い人がπ/２以下の距離で玉を拾いに行けば良いことになる。

２つの対蹠点から始めて spherical suspension をとることを繰り返した時に、初めの２点も含めて、それぞれの極の２点に順に配置をしていけば、π/２よりもさらに小さくすることができる。

７．終わりに

射影空間RP^nでの対戦も同様に考えることができる。例えばｎ≧２のときに、$a_2(RP^n)=\frac{\pi}{2}$となる。

また、特異点を含むような、多様体ではない空間でゲームをしたらどうなるだろうか。例えば、曲率が１以上のｎ次元アレクサンドロフ空間 X においては、擬測地線を用いたトポノゴフの比較定理より、$a_k(X) \leqq a_k(S^n)$になることが分かっている[(2)(3)]。ここで、アレクサンドロフ空間とは、測地三角形において比較定理が成り立つという意味で曲率が定義された空間である。ｋが奇数のとき、上式の等号が成立するときに、アレクサンドロフ空間 X は球面S^nと等長的になることが分かっている[(2)(3)]。ｋが偶数の場合の等号成立時はいくつかに分かれる。

８．参考文献

（１）K.Grove-P.Petersen, On the excess of metric spaces and manifolds. preprint

（２）N.Sochi, Some metric invariants of spheres and Alexandrov spaces Ⅰ. Math.J.Okayama Univ.46,163-182(2004)

（３）N.Sochi, Some metric invariants of spheres and Alexandrov spaces Ⅱ. Math.J.Okayama Univ.47,193-202(2005)