組合せの２進数表示における積の解釈
―数学のよさを考えるための教材として―

南郷　毅*

Interpretation of the Product in the Binary-Number Representation of the Combination
―Teaching Materials for Appreciation of Mathematics―

Tsuyoshi Nango*

Abstract

The Binary-Number representation of the combination is the teaching materials for high school students to learn appreciation of mathematics. We can apply it to some equality of the combination, but there is a restriction that the coefficient is 1 or -1. In this study, we consider the product of the combination that the same digit is selected twice, and we discuss some equality including r×nCr, (n+1) ×nCr,or $\frac{1}{r+1}$×(n+1) ×nCr.

1．はじめに

高等学校の数学科では，平成24年度から新学習指導要領に基づく教育が実施されている．新学習指導要領では，数学科の目標において「数学の見方や考え方のよさ」を「数学のよさ」に変更し，数学のよさをより広く捉えている[1]．また，必履修科目である数学Ⅰや多くの高校生が履修する数学Aにおいて課題学習の時間が設定され，数学的活動を通じて数学のよさを体感する枠組みが用意された．さらに，課題学習向けの様々な教材が開発され，実践例の蓄積も始まっている．筆者は，組合せの２進数表示を開発し，座標平面上での組合せの表示やいくつかの等式の証明を通じて数学の表現・処理のよさを体感できる教材を作成した[2]．

[2]では，高等学校の教科書に登場する基本的な組合せの等式を，組合せの２進数表示を用いて解釈した．しかし，それらは組合せの係数が１または−１の等式のみであり，係数が１や−１ではない組合せの等式に適用できるような２進数表示による解釈を検討できていない．[2]の教材としての完成度をより高めるためには，係数が１や−１以外の場合に適用できる解釈の検討が必要である．

本研究の目的は，係数が１や−１以外の組合せの等式を議論するために，組合せの２進数表示における積の解釈を開発することである．

本稿では，[3]をもとに，k×$_nC_r$においてｋがｒまたは(ｎ＋１)の場合についての解釈を示し，３つの等式に適用する．また，解釈と等式からなる教材の活用方法やよさについて述べる．

高等専門学校は，高等学校と異なり学習指導要領によって学習事項が規定されることはない．高等専門学校の数学と高等学校の数学は，その目的や内容の扱いに大きな違いがある．しかし，高等学校の学習指導要領で述べられる数学教育の理念や目標の中には，高等専門学校の低学年の数学教育に活用できるものが多数ある．

本研究では，高等学校向けの教材として組合せの２進数表示を取り扱うが，高等専門学校においても活用できると考える．

2．２進数表示による組合せの解釈

本章では，[2]をもとに，２進数表示による組合せの解釈について述べる．

組合せとは，異なるｎ個のものから順序を問題にせずｒ個を取り出して作った組のことである．その組の総数を$_nC_r$で表す．

高等学校の教科書や，いくつかの高等専門学校向け

*総合教育科

平成26年11月30日受理

の教科書では，このように，ものを「取り出す」行為とともに組合せを定義している[4][5][6]．しかし，組合せの定義において本質的なことは，ものを「取り出す」行為ではなく，取り出すものを「選択する」行為である．この「選択する」行為に着目すると，選択対象はものである必要はなく，また，取り出して組を作るということもしなくてもよい．選択対象が選ばれているか選ばれていないかが明確になればよい．

つまり，ｎ個のものをｎ個の０の並びとみなしてもよい．この際に，各０の位置を桁と捉え１桁目の０やｎ桁目の０のように呼ぶ．続いてｎ個の０の並びからｒ個を選ぶが，選ばれた桁の０を１に変化させることで，その桁の０が選ばれたことを表すことにする．

このように組合せを解釈すると，例えば，${}_3C_2$は３個の０のならび０００から２個の０を１に変えたものの総数と考えられる．これは，１１０，１０１，０１１の３個であるから${}_3C_2=3$である．このように組合せを解釈すると，２進数と組合せを対応させて考えることができる．この解釈を，２進数表示による組合せの解釈と呼ぶ．

２進数表示による組合せの解釈により，組合せを座標平面上に表現することや，組合せの等式を座標平面上の点の数え上げとして捉えることができる．

３．積の解釈と等式への適用

本章では，$k\times{}_nC_r$においてｋがｒまたは(ｎ＋１)の場合についての解釈について述べ，その解釈を用いて３つの等式を示す．

なお，あらかじめ断っておくが，ここで述べる解釈などは，純粋に数学としての厳密性を追求している訳ではない．高校生が考察や試行錯誤を続ける中で到達できる内容として考えている．

そのため，ある桁が２回選ばれていることを，その桁を０から１に変え，さらに１に○をつけるという方法で表現している．これは，高校生が到達可能な表現手段であること，２進数表示を崩さないことを考慮した表現である．

３．１　積の解釈

$k\times{}_nC_r$ において，ｋを${}_kC_1$とみなし，

$$k\times{}_nC_r={}_kC_1\times{}_nC_r$$

として取り扱う．以下，k=r，k=(n+1)の場合の解釈を示す．また，${}_{n+1}C_1\times{}_nC_r$ を(r+1)で割るときの解釈を示す．

３．１．１　k=r のとき

${}_rC_1\times{}_nC_r$を

「ｎ桁の２進数００…０からｒ個の桁を選び１に変える．さらに，１に変えたｒ個の桁から１個の桁を選び，○をつける．」

と解釈する．

${}_2C_1\times{}_3C_2$を例にとると，

「３桁の２進数０００から２個の桁を選び１に変える．さらに，１に変えた２個の桁から１個の桁を選び，○をつける．」

となる．解釈のイメージを図１に示す．

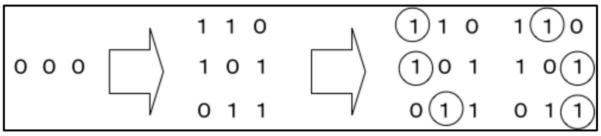

図１　${}_2C_1\times{}_3C_2$の解釈のイメージ

３．１．２　k=(n+1)のとき

${}_{n+1}C_1\times{}_nC_r$を

「(ｎ＋１)桁の２進数００…０から１個の桁を選び１に変え○をつける．さらに，残りのｎ個の桁からｒ個の桁を選び１に変える．」

と解釈する．

${}_3C_1\times{}_2C_1$を例にとると，

「３桁の２進数０００から１個の桁を選び１に変え○をつける．さらに，残りの２個の桁から１個の桁を選び１に変える．」

となる．解釈のイメージを図２に示す．

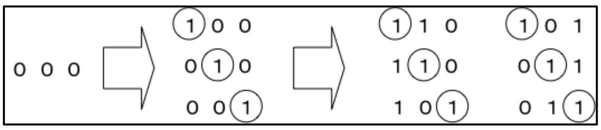

図２　${}_3C_1\times{}_2C_1$の解釈のイメージ

３．１．３　$\frac{1}{r+1}\times{}_{n+1}C_1\times{}_nC_r$のとき

${}_{n+1}C_1\times{}_nC_r$は，

「(ｎ＋１)桁の２進数００…０から１個の桁を選び１に変え○をつける．さらに，残りのｎ個の桁からｒ個の桁を選び１に変える．」

と解釈した．${}_{n+1}C_1\times{}_nC_r$の解釈方法から，○の有無のみが異なり，１に変わっている桁が同じ２進数は，(ｒ＋１)個ずつ存在することがわかる．(ｒ＋１)で割ることを，

「${}_{n+1}C_1\times{}_nC_r$の解釈で構成した２進数から○を外すと同じになる（ｒ＋１）個の２進数を同一

とみなす.」

と解釈する．最終的には，$\frac{1}{r+1}\times {}_{n+1}C_1\times {}_nC_r$は，

「（n＋1）桁の２進数００…０から（r＋1）個の桁を選び１に変える.」

と同様になる．これは，${}_{n+1}C_{r+1}$の解釈そのものである．つまり，

$$\frac{1}{r+1}\times {}_{n+1}C_1\times {}_nC_r= {}_{n+1}C_{r+1}$$

となることがわかる．

$\frac{1}{2}\times {}_3C_1\times {}_2C_1$を例にとると，

「３桁の２進数０００から１個の桁を選び１に変え○をつける．さらに，残りの２個の桁から１個の桁を選び１に変える．この解釈で作成した２進数から○を外すと同じになる２個の２進数を同一とみなす.」

となる．解釈のイメージを図３に示す．

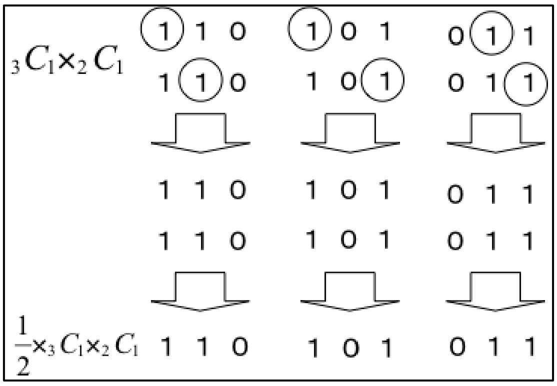

図３　$\frac{1}{2}\times {}_3C_1\times {}_2C_1$の解釈のイメージ

$\frac{1}{2}\times {}_3C_1\times {}_2C_1$　が${}_3C_2$と一致していることがわかる．

極めて限定的な場合の解釈であるが，積は○をつけることに対応し，商は○を外すことに対応している．

３．２　等式への解釈の適用

本節では３．１節で示した解釈を適用し３つの等式を示す．なお，n<r の場合の${}_nC_r$の値を０，${}_0C_0$の値を１と定義する．

（命題１）自然数ｎとｒに対して，等式

$$r\times {}_nC_r=n\times {}_{n-1}C_{r-1}$$

が成立する．

証明：ｒを${}_rC_1$と考える．左辺の$r\times {}_nC_r$は${}_rC_1\times {}_nC_r$である．これは，ｎ桁の２進数００…０からｒ個の桁を選び１に変え，さらに，１に変えたｒ個の桁から１個の桁を選び，○をつけた２進数の総数である．

ｎを${}_nC_1$と考える．右辺の$n\times {}_{n-1}C_{r-1}$は${}_nC_1\times {}_{n-1}C_{r-1}$である．これは，ｎ桁の２進数００…０から１個の桁を選び１に変え○をつけ，残りの（n−1）個の桁から（r−1）個の桁を選び１に変えた２進数の総数である．

左辺が表す２進数は，ｒ個の桁を１に変え，その後に○をつけることで構成されている．右辺が表す２進数は，１個の桁を１に変え○をつけ，その後に（r−1）個の桁を１に変えることで構成されている．

先に１に変えたか，先に○をつけたかの違いはあるが，いずれも，ｎ桁の２進数でｒ個の桁が１であり，そのｒ個の桁のうち１個の桁に○がついている２進数が構成されている．よって，

$$r\times {}_nC_r=n\times {}_{n-1}C_{r-1}$$

が成立する．

（証明終わり）

（命題１）の証明のイメージを図４に示す．

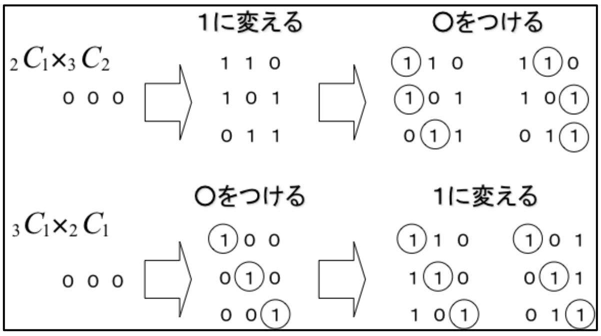

図４　（命題１）の証明のイメージ

先に１に変えたか，先に○をつけたかの違いはあるが，最終的に同じ２進数が構成されていることがわかる．

（命題２）自然数ｎに対して，等式

$${}_nC_1 + 2{}_nC_2 + 3\,{}_nC_3 +\cdots+ r\,{}_nC_r +\cdots+ n\,{}_nC_n = n2^{n-1}$$

が成立する．

証明：ｒを${}_rC_1$と考えると，左辺は

$${}_1C_1\times {}_nC_1 + {}_2C_1\times {}_nC_2 +\cdots+ {}_rC_1\times {}_nC_r +\cdots+ {}_nC_1\times {}_nC_n$$

となる．

左辺は，ｎ桁の２進数００…０に対して，次のような処理をした２進数の総数を数えている．

・１個の桁を１に変え，○をつける
・２個の桁を１に変え，変えた桁の１個に○をつける

…

・ｒ個の桁を１に変え，変えた桁の１個に〇をつける

…

・ｎ個の桁を１に変え，変えた桁の１個に〇をつける

続いて右辺を考察する．2^{n-1}は，

$$2^{n-1} = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_2 + \cdots + {}_{n-1}C_{r-1} + \cdots + {}_{n-1}C_{n-1}$$

であり，ｎを${}_nC_1$と考えると，右辺は

$${}_nC_1 \times {}_{n-1}C_0 + {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{r-1} + \cdots + {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{n-1}$$

となる．

右辺は，ｎ桁の２進数００…０に対して，次のような処理をした２進数の総数を数えている．

・１個の桁を１に変え〇をつける

・１個の桁を１に変え〇をつけ，残り（ｎ−１）桁から１個の桁を１に変える

…

・１個の桁を１に変え〇をつけ，残り（ｎ−１）桁から（ｒ−１）個の桁を１に変える

…

・１個の桁を１に変え〇をつけ，残り（ｎ−１）桁から（ｎ−１）個の桁を１に変える

先に１に変えたか，先に〇をつけたかの違いはあるが，左辺，右辺とも同じ２進数が構成される．

従って，

$${}_1C_1 \times {}_nC_1 + {}_2C_1 \times {}_nC_2 + \cdots + {}_rC_1 \times {}_nC_r + \cdots + {}_nC_1 \times {}_nC_n$$
$$= {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_0 + {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_1 + \cdots + {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{r-1} + \cdots + {}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{n-1}$$

である．よって，

$${}_nC_1 + 2\,{}_nC_2 + 3\,{}_nC_3 + \cdots + r\,{}_nC_r + \cdots + n\,{}_nC_n = n2^{n-1}$$

が成立する．

（証明終わり）

（命題２）の議論は，（命題１）を繰り返し適用することを表している．１以上ｎ以下の自然数ｒに対して

左辺の第ｒ番目の項は，${}_rC_1 \times {}_nC_r$

右辺の第ｒ番目の項は，${}_nC_1 \times {}_{n-1}C_{r-1}$

である．（命題１）からこれらは等しい．各項が等しいので，それらの和も等しくなる．

（命題３）自然数ｎに対して，等式

$${}_nC_0 + \frac{1}{2}{}_nC_1 + \frac{1}{3}{}_nC_2 + \cdots + \frac{1}{r+1}{}_nC_r + \cdots + \frac{1}{n+1}{}_nC_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

が成立する．

証明：右辺の分母である（ｎ＋１）を${}_{n+1}C_1$とみなす．両辺に${}_{n+1}C_1$をかけて整理した

$${}_{n+1}C_1 \times {}_nC_0 + \frac{1}{2} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_1 + \cdots + \frac{1}{r+1} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_r$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n+1} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_n + 1 = 2^{n+1}$$

を示すことにする．

先に示した解釈から，$\frac{1}{r+1} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_r$　は，（ｎ＋１）桁の２進数００…０から（ｒ＋１）個の桁を選び１に変えてできる２進数の総数である．これは${}_{n+1}C_{r+1}$と同様である．左辺の末項の１を${}_{n+1}C_0$とみなすと，左辺は

$${}_{n+1}C_1 \times {}_nC_0 + \frac{1}{2} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_1 + \cdots + \frac{1}{r+1} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_r$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n+1} \times {}_{n+1}C_1 \times {}_nC_n + 1$$
$$= {}_{n+1}C_1 + {}_{n+1}C_2 + \cdots + {}_{n+1}C_{r+1} + \cdots + {}_{n+1}C_{n+1} + {}_{n+1}C_0$$
$$= {}_{n+1}C_0 + {}_{n+1}C_1 + {}_{n+1}C_2 + \cdots + {}_{n+1}C_{r+1} + \cdots + {}_{n+1}C_{n+1}$$
$$= 2^{n+1}$$

となり，右辺と一致することがわかる．よって，

$${}_nC_0 + \frac{1}{2}{}_nC_1 + \frac{1}{3}{}_nC_2 + \cdots + \frac{1}{r+1}{}_nC_r + \cdots + \frac{1}{n+1}{}_nC_n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

が成立する．

（証明終わり）

本章で述べた組合せの解釈とその解釈を適用した３つの等式の証明を合わせて，組合せの積の解釈による教材と呼ぶ．

４．教材の活用方法と教材の持つよさ

組合せの積の解釈による教材（本教材と呼ぶ）の活用方法について述べる．

本教材は，[2]で組合せの２進数表示を学習した後に用いることを前提としている．

本教材の（命題１）の等式は，高等学校の教科書に掲載されている組合せの等式のうち，[2]の学習事項だけでは解釈できない等式である．学習者に[2]を用いて教科書に登場する組合せの等式を解釈する取り組みを行わせる．すると，係数が１や−１ではない等式である（命題１）の等式が[2]で示した方法では解釈することができないことに気がつく．そこで，[2]の解釈を拡張して（命題１）を解釈するにはどうするかを考えさせる．

数学が苦手な学習者には，本教材で示した積の解釈を提示し，（命題１）の証明を考えさせる．

数学が得意な学習者には，積の解釈を自ら作り上げさせる．具体例を多数考察させる中で，「１に〇をつける」または同等の表現を開発させたい．「１に〇をつける」という表現方法は，数学的ではないが，数学が得

意な高校生が十分に到達可能なレベルの表現である．学習者が積の解釈を開発した後，３つの命題の証明を考えさせる．

本教材は，組合せの２進数表示を壊さずに積の解釈を試みているため，２進数表示の拡張を体験できる．新たな問題を考察するために，既知の概念を拡張することは，数学の見方・考え方のよさである．また，積の解釈の表現方法を考えることは，自分なりの表現を開発することになり，数学の楽しさを味わうことができる．

本教材では，数学の見方・考え方のよさや数学の楽しさを味わうことができる．

５．まとめ

本研究の成果は，次の３点である．

1．$k\times{}_{n}C_{r}$ においてｋがｒまたは（ｎ＋１）の場合の解釈を開発した．
2．${}_{n+1}C_{r}\times{}_{n}C_{r}$ を（ｒ＋１）で割った場合の解釈を開発した．
3．解釈と３つの等式からなる教材を作成した．

本研究により，組合せの積の解釈の制約の一部が解消された．

しかしながら，２つの場合以外の組合せの積に適用できる適切な解釈が見いだせていない．また，[2]で示したような座標平面上の表現も開発できていない．今後も，組合せの積の解釈を検討する．

参考文献

[1]　文部科学省：高等学校学習指導要領解説数学編理数編，p. 17，(2009)
[2]　南郷毅：２進数表示を用いた組合せの解釈－数学の表現・処理のよさを視点に－(日本数学教育学会誌　第 96 巻　第 3 号)，pp. 29-35 ，(2014)
[3]　南郷毅：組合せの２進数表示における積について（日本数学教育学会誌　第 95 巻臨時増刊　第 95 回大会特集号（山梨大会））p. 413 及び発表資料，(2013)
[4]　俣野博，河野俊丈ほか：文部科学省検定済教科書　高等学校数学科用　数学Ａ（東京書籍），p. 20，(2012)
[5]　高橋陽一郎ほか：文部科学省検定済教科書　高等学校数学科用　数学Ａ（啓林館），p. 29，(2012)
[6]　岡本和夫ほか：新版　基礎数学（実教出版），p. 230，(2012)