

因数分解指導における視覚化について

南郷 毅*

Visualization on Teaching Method for Factorization of Polynomials

Tsuyoshi Nango*

Abstract

Factorization of polynomials is related to various fields of the mathematics in upper secondary education. So it is very important for students, but it is not easy to understand. The visualization is effective for understanding of the mathematics. In this study, we consider the visualization on teaching method for factorization of polynomials.

1. はじめに

因数分解は、後期中等教育段階の数学を学ぶための極めて基礎的な技能である。その指導の実態は、中学校の延長として、解法を説明し演習により技能に習熟することが中心となっている。高等専門学校向けの教科書[1][2]や高等学校向けの教科書[3][4][5]を調べても、いずれも、解法の説明、問題演習という構成である。また、「因数分解は展開の逆であるから展開ができればできる」という主張が、学生だけでなく指導者側にも広く信じられているようであり、因数分解は練習さえすればすぐに身につくものとされている。

しかし、後期中等教育段階の因数分解は、展開の単純な逆操作ではなく、複数の手法を問題に応じて使い分けの力が必要な複雑な技能である。そのため、中学校の因数分解指導の延長のような指導では、学力が標準以下の学生(本校の多くの学生が該当する)が因数分解を理解し、実際にできるようになることは困難である。因数分解でつまずくと、その後の数学のありとあらゆる単元でつまずくことになる。因数分解ができないために、数学を投げ出し、さらには専門科目の学習に支障をきたすこととなる。

筆者は、前任校も含めて、因数分解単元の指導を7年担当してきた。その中で、因数分解ができない生徒・学生は、知識として知っている因数分解の手法を問題に応じて使い分けられない、また、因数分

解の手法間の関連が理解できていないという特徴があった。

本研究の目的は、学力が標準以下の学生を対象とし、因数分解の手法の適切な活用方法や関連の理解を促進する教材や表現方法を構築することである。なお、本研究で対象とする因数分解は、高等専門学校や高等学校の1年生の冒頭で学ぶ因数分解である。そのため、因数定理や2次方程式の解を用いた因数分解は含んでいない。

2. 先行研究の検討

因数分解の指導についての先行研究として、因数分解のつまずきを判定するもの、因数分解の公式の構築方法についてのもの、因数分解の公式を視覚化したものなどがある。

中込[6]は、中学生を対象とし、因数分解の計算テストにおける誤答から、その原因となるつまずき事項を判定する誤答分析用のフローチャートを構築した。また、因数分解ができるための必要条件として、公式を覚えていること、展開ができること、公式に問題を適用できること、因数分解のアルゴリズムを習得していることを指摘している。

筆者は、中込[6]の分析は中学校における因数分解を対象としているが、後期中等教育段階の因数分解においても、因数分解ができるための必要条件は共通していると考えられる。後期中等教育段階の因数分解

では、たすき掛けの図式を使えること、ある文字に着目した時の整式の次数を求められること、因数分解の問題に応じた手法を選ぶことができることが必要条件に追加される。

山口[7]は、高校生が因数分解の時期に数学がわからなくなる原因として、「因数分解は乗法公式の逆である」から「乗法公式のように因数分解の公式を暗記しなさい」という教員の授業展開と、その授業展開に合わせた高等学校の教科書の記述や構成をあげている。そのような指導が、因数分解に対する興味関心の喪失につながっていると指摘し、学習者の興味関心を引き出す因数分解の指導として、因数分解の基本公式を、共通因数を作り出し導く方法を示している。

筆者は、山口[7]が問題と指摘する「乗法公式の逆だから覚えなさい」という指導は、中学校の段階では有効であったと考える。中学校の因数分解では4個の公式と1個の手法を用いるだけであり、「乗法公式の逆だから覚えなさい」で十分対応できる。しかし、後期中等教育段階の因数分解では、どこまで深く学ぶのかに応じて異なるが、少なくとも6個の公式と7個の手法を用いることになる。これらをすべて覚えることは可能であっても、覚えるだけでは問題に応じて使い分けることが困難である。そのため、学力が標準以下の学生は、中学校の時に有効であった方法で学習を進めた結果、公式や手法を覚えたにも関わらず因数分解ができない状況に陥っている。学生の「因数分解は展開の逆であるから展開ができればできる」という認識を変換させる指導が必要である。また、どの問題にどの手法を適用するかを判定する方法を指導する必要がある。

そのほかの先行研究として、因数分解の公式を図で表現する指導が多数ある(例えば、日野[8])。これらは、主に日本数学教育学会の全国大会で報告されている。公式の視覚化は、学習者の因数分解に対する認識を変化させることや、学習者の興味関心を振起させることにつながると報告されている。

3. 因数分解指導の改善に向けて

本章では、高等専門学校向けの教科書、高等学校向けの教科書の因数分解単元の取り扱いの現状を調べ、先行研究を踏まえて因数分解指導の改善に必要な事項を検討する。

3.1 教科書における因数分解の取り扱い

高等専門学校向けの教科書2種類[1][2]、高等学校向けの教科書3種類[3][4][5]について、因数分解

単元の学習事項とページ数、練習問題数を調べた。それぞれの結果を表1、表2にまとめる。

表1 因数分解の学習事項の取り扱い

学習事項	高専向け		高校向け		
	A社	B社	C社	D社	E社
共通因数括りだし	○	○	○	○	○
基本公式4種類	○	○	○	○	○
たすき掛け	○	○	○	○	○
置き換え	○	▲	○	○	○
最低次の文字へ着目	○	▲	○	○	○
好きな文字へ着目	○	○	○	○	○
2乗の差の作成	▲	×	○	○	○
複2次式の処理	○	▲	○	△	×
3乗の和の公式	○	○	△	△	×

○：説明や具体例の記述がある。

△：説明や具体例の記述があるが、研究や参考の扱い。

▲：説明や具体例の記述がないが、練習問題で扱われている。

×：扱われていない。

表2 因数分解の取り扱い分量

分量	高専向け		高校向け		
	A社	B社	C社	D社	E社
単元のページ数	6	3	8	8	6
練習問題数	29問	12問	43問	38問	44問

高等専門学校向けの教科書は、因数分解の取り扱いにおいて▲が複数ある。また、説明の記述や練習問題量が高等学校向け教科書と比較して少ない。高等学校向けの教科書には、 Δ や \times が複数ついているが、現状の大学入試を考えた場合、 Δ や \times の事項の学習は必要であることから、実際は授業の中で取り扱われることになる。

高等専門学校、高等学校ともほぼ同様の6個の公式と7個の手法を扱っている。すべての教科書は、「例、例題による公式や手法の説明→練習問題」により構成されている。また、いくつかの教科書では「乗法公式の逆から次の公式が成立する」という旨の記述があり、因数分解は展開の逆であるという認識を与える形になっている。

いずれの教科書においても、どの公式・手法をどの問題に適用すべきかの判定についての説明はない。6個の公式と7個の手法の使い分けは、問題演習を通じて自ら習得することになっている。しかし、この使い分けの習得は容易ではない。従って、学力が

標準以下の学生にとっては、教科書に沿った指導や教科書を用いた自学自習だけでは、因数分解ができるようになることは困難である。

筆者は、このことが、学力が標準以下の高等専門学校や高校生の因数分解の時期に数学がわからなくなる原因と考える。

3. 2 因数分解指導に必要な事項

因数分解の指導では、しばしば、多量の練習問題による演習が用いられる。演習が重要なことは論を待たないが、手法の関連を意識した演習が必要である。例えば、最も低い次数に着目する手法の利用には、置き換えの手法が利用できることが前提となる。従って、置き換えの手法を利用できない学生に、最も低い次数に着目する手法を利用する問題を演習させても、解答できない。どの手法がどの手法を前提としているのかを踏まえた演習が必要である。

筆者は、教科書の記述内容や2章で検討した先行研究を踏まえ、後期中等教育段階の学力が低位の学生の因数分解の指導には、次の点が必要と考える。

- (1) 因数分解ができるための必要条件を、各手法や公式の関係とともに理解させること。
- (2) 「因数分解は展開の逆であるから展開ができればできる」という認識を改めさせること。
- (3) 利用すべき因数分解の公式と手法を判定する方法を開発し、使えるように指導すること。
- (4) 練習問題を追加し、各手法や公式との関係を意識させ演習させること。

本研究では、(1)(2)の指導に必要な教材として、展開の構造と因数分解の構造を図で表現し、公式や手法の関連を視覚化する。この視覚化により、条件や公式のそれぞれの関係の整理ができ、ある手法の前提となる手法や公式が明らかになる。また、展開の構造と因数分解の構造を比較することで、因数分解の構造の複雑さを示し、「因数分解は展開の逆であるから展開ができればできる」という認識を改めさせる。(3)の指導に必要な教材として、因数分解フローチャートを作成する。フローチャートを用いて演習することで、問題に対して用いる手法を意識した演習が可能となり、適切な手法を選択し因数分解ができるようになる。

4. 因数分解指導における視覚化

本章では、展開と因数分解の構成を視覚化する。また、因数分解フローチャートを作成する。

4. 1 視覚化の方法

展開と因数分解は、それぞれ、複数の手法や公式により構成されている。それぞれの手法や公式には、多くの場合に用いられる基礎的なものから特定の場合に用いる応用的なものまでがある。また、応用的なものは、基礎的なものを活用している。

ところで、応用的なものが基礎的なものを利用する関係がある対象を記述する方法として、情報システムの開発におけるソフトウェア構成図がある。ソフトウェア構成図は、情報システムを構成するサーバやクライアント等の機器に実装するソフトウェアの構成を明確にした図である。図1に基本的な書き方を示す。

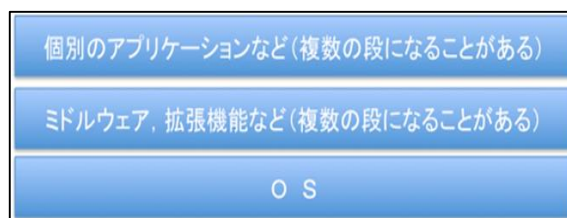


図1 ソフトウェア構成図の基本形

ソフトウェア構成図は、下にあるものほど基礎的なソフトウェアを表し、上にあるほど応用的なソフトウェアを表す。上にある応用的なソフトウェアは、それより下の段のソフトウェアが提供する機能を利用することを表している。

この記述方法は現実の世界においても活用されている。例えば、情報処理技術者試験を実施している情報処理推進機構は、情報処理技術者試験の試験構成を、図2のようなソフトウェア構成図の形式で表現している[9]。

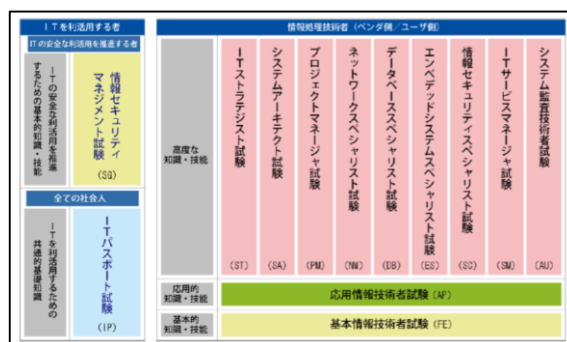


図2 情報処理技術者試験の構成

(出典：情報処理技術者試験 試験要項 ver2.0 p.1
http://www.jitec.ipa.go.jp/1_13download/youkou_ver2_0.pdf)

図2では、下部に示されている試験ほど基礎的な試験、上部に示されている試験ほど応用的な試験と

なっている。基本情報技術者試験，応用情報技術者試験が土台となり，その上に専門に分化した高度情報技術者試験が設定されているという試験構成が，非常にわかりやすく視覚化されている。この表現手法を，展開と因数分解に適用する。

4. 2 展開と因数分解の視覚化

展開の構成を視覚化したものを図3に示す。



図3 展開の構成の視覚化

図3の右半分は，置き換え・順番入れ替えの手法が乘法公式を利用し，乘法公式が分配法則を利用することを示している。左半分は，乘法公式，置き換え，順番入れ替えを使わなくても，分配法則のみで展開が可能であることを表している。

因数分解の構成を視覚化したものを図4に示す。

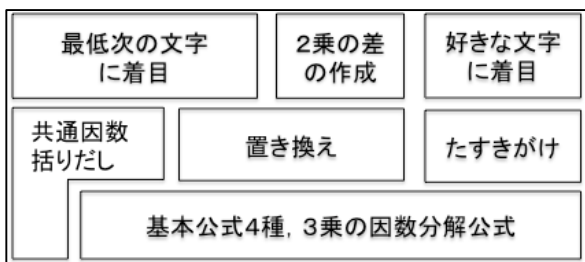


図4 因数分解の構成の視覚化

図3と同様に，上の段にある手法は，下の段にある手法や公式を利用することを示している。因数分解には，展開における分配法則のような，どの場合にも適用可能な手法は無い。図4によって，因数分解の手法と公式の関係や，因数分解ができるための条件が理解できる。図4を参照しながら演習することで，手法や公式の間の関係を意識した演習が可能となる。また，図3と図4を比較することにより，因数分解が展開よりもはるかに複雑であることを明確に理解できる。図3と図4を提示することで，学生の「因数分解は展開の逆であるから展開ができれ

ばできる」という認識を改めさせることができる。

4. 3 因数分解フローチャート

因数分解を行う時は，最初に，共通因数の有無，公式の適用の可否，たすきがけの検討を行う。これらが不相当である場合に，置き換え，2乗の差の作成，次数の確認へと進み，適用可能な手法を探す。適用可能な手法が見つければその手法を適用する。その後，手法を適用して変形した整式に，再び，共通因数の有無からの検討を行う。この手順を繰り返すことで，最終的に公式や共通因数の括りだしへ帰着させ，因数分解を行う。この一連の手順を，図5のフローチャートに表す。

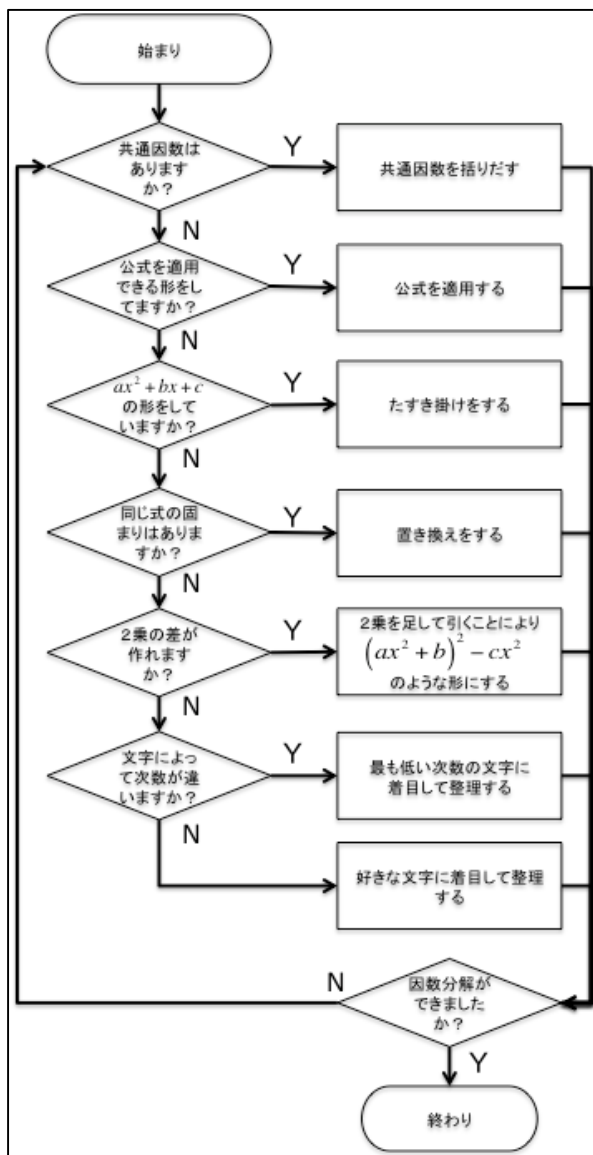


図5 因数分解フローチャート

このフローチャートを用いながら因数分解を演習することで，利用すべき因数分解の公式と手法を判

定する力を身につけることができると考える。

5. まとめ

本研究では、展開と因数分解の構成を図で示し、それぞれの手法や公式の関係性を明らかにした。この図は、展開と因数分解の複雑さの違いを明確に示しており、「因数分解は展開の逆であるから展開ができればできる」という認識を変換させる指導の根拠となる。さらに、因数分解の手法の適用のためのフローチャートを作成した。因数分解のフローチャートは、問題に応じた手法を見つけ出す指導の教材となる。

これらは、3. 2節で述べた因数分解の指導に必要な事項のうち(1)(2)(3)を実現するための教材である。今後、1年生対象の数学1の授業でこれらを活用した指導を行い、その効果を測定する。

本研究のきっかけは、ある学生からの「因数分解は展開の逆のはずなのに、展開ができる自分がなぜできないのですか?」という質問と、数学科教員の打ち合わせ会での因数分解指導についての議論である。教科指導においては、学生からの小さな「なぜ?」を拾うことや、教員が日々感じていることについて議論することの重要性を改めて認識した。

引用・参考文献

- [1] 岡本和夫ほか：新版 基礎数学（実教出版），pp. 14-19，（2012）
- [2] 高藤節夫ほか：新 基礎数学（大日本図書），pp. 7-9，（2011）
- [3] 高橋陽一郎ほか：文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 数学 I（新興出版社啓林館），pp. 17-25，（2011）
- [4] 俣野博，河野俊丈ほか：文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 数学 I（東京書籍），pp. 14-21，（2012）
- [5] 山本慎ほか：文部科学省検定済教科書 高等学校数学科用 最新 数学 I（数研出版），pp. 20-25，（2011）
- [6] 中込幸二：因数分解におけるつまずきの分析的研究（日本数学教育学会誌，第76巻，第9号），pp. 244-249，（1994）
- [7] 山口倬史：因数分解の基本公式の導き方について（鹿児島女子短期大学紀要，第44号），pp. 209-222，（2009）
- [8] 日野朋之：因数分解の指導一図を利用して—（日本数学教育学会誌，第88巻，臨時増刊総

会特集号），p. 373，（2006）

- [9] 情報処理推進機構：情報処理技術者試験 試験要綱 ver2.0，p. 1，（2015）
http://www.jitec.ipa.go.jp/1_13download/youkou_ver2_0.pdf，
 2015年11月23日22:34:47 アクセス