

学生による因数分解手法の視覚化について

南郷 毅*

Visualization of Factorization Methods by Students

Tsuyoshi Nango*

Abstract

Factorization of polynomials is related to various fields of mathematics in upper secondary education. The visualization is effective methods for understanding mathematics. In this study, we consider the visualization of factorization methods by students. We analyze the relationship between students' drawing of factorization and exam scores. Students whose score of exam were high draw a diagram of factorization including the solution procedure with conditional branches. Students whose score of exam were not high draw a diagram of factorization only focusing on the relationship of learning matters.

1. はじめに

後期中等教育段階の因数分解は、展開の単純な逆操作ではなく、複数の手法を問題に応じて使い分けられる力が必要な複雑な技能である。筆者は、南郷[1]において、因数分解指導に必要な事項として、次の4点を指摘した。

- (1) 因数分解ができるための必要条件を、各手法や公式の関係とともに理解させること。
- (2) 「因数分解は展開の逆であるから展開ができればできる」という認識を改めさせること。
- (3) 利用すべき因数分解の公式と手法を判定する方法を開発し、使えるように指導すること。
- (4) 練習問題を追加し、各手法や公式との関係を意識させ演習させること。

また、(1)(2)を達成するためには、複雑な関係や手順を視覚化することが有効と考え、因数分解の構成図や因数分解フローチャートを開発した。ところで、筆者は、開発した教材を利用した(3)(4)を達成する指導方法を考えている際に、そもそも学生には因数分解がどのように見えているのか、また、それを視覚化させた際に、因数分解のできる学生とできない学生間にはどのような違いがあるのかということに興味を持った。また、教材を用いた指導の前に、学生自身に因数分解を視覚化させ、教材と対比させることで、学生自身の理解できていない部分をより明確にできると考えた。

本研究の目的は、学生が因数分解の視覚化として

作成した図の特徴と因数分解の理解度との関連を調べ、視覚化を伴う指導の改善を図るための知見を得ることである。

本研究では、学生が因数分解の視覚化として作成した図の特徴を、前期中等教育(中学校)修了段階での因数分解の能力を調べた計算力試験、後期中等教育段階の因数分解の能力を調べた1年生前期中間試験の因数分解分野の正答数とともに分析する。

なお、本研究で対象とする因数分解は、高等専門学校や高等学校の1年生の冒頭で学ぶ因数分解である。そのため、因数定理や2次方程式の解を用いた因数分解は含んでいない。

2. 先行研究の検討

学習事項を視覚化した教材を用いた指導、学生・生徒自身に学習事項を視覚化させる指導には、これまで多数の実践研究がある。

2.1 視覚化教材による指導の先行研究

堤[2][3]は、大学初年時の学生に対して、学習意欲や理解度の向上を狙いとし、表計算ソフトを用いて様々な関数を学生自身に視覚化させる授業を実践している。視覚化により、極限や平均変化率と微分係数の関係、近似値の計算などについて、学生の理解が深まったことを報告している。

また、白坂[4]は、高等専門学校生に対して部分積分を図式化した指導を実践し、その有効性を報告し

ている。

いずれの実践研究においても、視覚化により学習事項の理解が深まることや学習意欲が向上することが報告されている。特に、多くの高校生や高等専門学校生が、意味はわからないが計算はできてしまう関数の極限の計算、微分の計算、積分の計算が、視覚化によって、意味を含めた理解につながっている。これらの先行研究から、筆者は、視覚化した教材を用いた指導は、意味を含めた理解を深めることができる指導方法であると考え。

2. 2 学習者による視覚化の先行研究

学習者自身が視覚化を行う活動として、コンセプトマップの作成がある。コンセプトマップとは、学習した事項や概念を表すキーワードなどを項目として書き出し、関連がある項目間を線で結び作成する図である。学習者は、コンセプトマップを作成することで、学習事項や概念の関連を明確にし、学習事項や概念を構造化することができる。とされている。

篠原[5]は、高校生に対し、授業中に作成したコンセプトマップを参照しながら問題演習に取り組ませる実践を行い、成績下位群の学力向上に効果があることを明らかにしている。問題演習時にコンセプトマップを参照することで、学習した知識の構造化が図られることを明らかにしている。篠原[5]の指導は、筆者が南郷[1]で示した、因数分解フローチャートを参照した演習と同形式の指導である。

安宅[6]は、高校生に対して、統合的な考え方を育むために単元毎の振り返りの際に生徒が協同的にコンセプトマップを作成する実践を行い、コンセプトマップの作成が学習事項の整理や深い理解につながることを示している。安宅[6]は、因数定理を含む因数分解を題材にしたコンセプトマップの作成を通じて、生徒が公式間の関係を統合的に考える様子が見て取れると述べている。

いずれの実践も、生徒が自らコンセプトマップを作成することにより、生徒の中で知識の構造化が進み、概念の関連を統合的に考えられるようになることが示されている。

ところで、コンセプトマップは関連がある場合に線で結ぶという規則で図を作成する。筆者は、コンセプトマップは、学習事項や概念について、静的な関連を明らかにしていると考え。実際に問題を解く際には、学習事項や概念間の関連だけでなく、どの順番で学習事項や概念を用いるかという問題が発生する。筆者は、コンセプトマップを作成させる指導は、コンセプトマップが基本的に静的な関連を記載する図であることから、学習事項や概念をどのよ

うに動作させるかという動的な観点の指導が困難と考える。

2. 3 本研究と先行研究の相違点

本研究は、学生自身が学習事項を視覚化する取り組みを実施する点で、コンセプトマップ作成を伴う実践研究と類似している。しかし、コンセプトマップ作成を伴う実践研究の多くは、コンセプトマップの描き方(視覚化の方法)を指導したのちに、学生・生徒に図を作成させ、その内容を評価、検討している。そのため、視覚化の方法を知らない学生・生徒が、学習事項をどのようなイメージで捉えているかは検討されていない。

本研究は、視覚化の方法について指導していない状態で、学生が作成した因数分解の図の特徴と因数分解の理解度との関連を調べており、先行研究と異なっている。

3. 学生による因数分解の視覚化

3. 1 実践の状況

実践を実施したクラスは、本校の情報工学科1年生(41名(男子24名、女子17名))である。入学当初から学力が例年に比して高く、多くの学生が熱心に学習に取り組むクラスである。

因数分解単元として90分×3回の授業を実施後、因数分解のまとめ演習の授業90分×1回を設定し、その時間内で演習とともに学生による因数分解の視覚化を実施した。学生に配布した演習教材の最後の問題として、因数分解の視覚化を実施する問題を設定した。なお、視覚化の問題は開始時間が同一になるように統制した。視覚化にあてた時間は約50分である。視覚化を開始する前に、因数分解の単元で学んだこととして

- ・共通因数でくくる
- ・公式を使う
- ・置き換えを使う
- ・たすきがけをする
- ・最低次の文字に着目する
- ・2乗の差を作る
- ・好きな文字に着目する

を列挙し、これらをどの順番で使うと因数分解はやりやすいのか、また、これらの関連はどうなっているのか考え、因数分解を図で表現してみるよう指示した。図の描き方は自由で、文字の書き込みも可能とした。

3. 2 学生の作成した因数分解の図

学生の作成した因数分解の図は、因数分解の手順を記載した図、因数分解の手法間の関連を記載した図の2タイプに分類できる。

因数分解の手順を記載した図を手順記載型、因数分解の手法間の関連を記載した図を関連記載型と呼ぶことにする。手順記載型は、分岐の有無でさらに分類できる。また、関連記載型は、コンセプトマップによる記載、情報システム記載手法(クラス図, システム構成図)による記載, 包含関係を用いた記載に分類できる。分類を表1にまとめる。

表1 学生が作成した図の分類

手順記載型		関連記載型		
分岐あり	分岐なし	コンセプトマップ	情報システム記載手法による図	包含関係

表1で示した分類について、詳細を述べる。

手順記載型(分岐あり)は、因数分解の手順について、矢印等を用いて順序がわかる形で記載されており、さらに、なんらかの形で場合分けに相当する分岐がある図とする。手順記載型(分岐あり)の例を図1に示す。

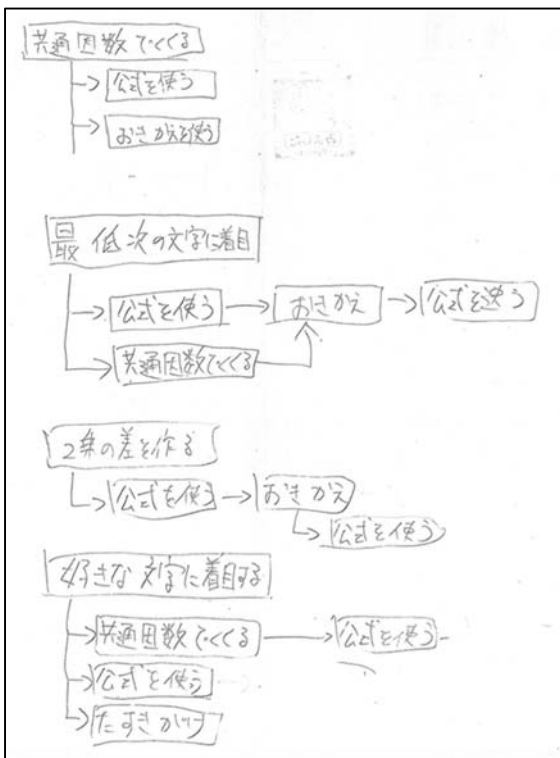


図1 手順記載型(分岐あり)

手順記載型(分岐なし)は、因数分解の手順について、矢印等を用いて順序がわかる形で記載されているが、場合分けに相当する分岐がない図とする。手順記載型(分岐なし)の例を図2に示す。

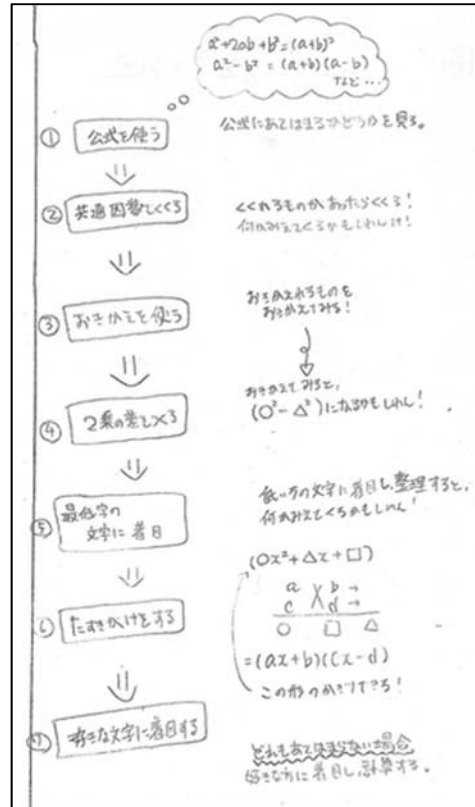


図2 手順記載型(分岐なし)

関連記載型(コンセプトマップ)は、関連があると考えられる因数分解の手法を線や矢印などで結んだ図とする。どのような順番で使うかではなく、手法間の関連が重視されていると考えられる図とする。関連記載型(コンセプトマップ)の例を図3に示す。

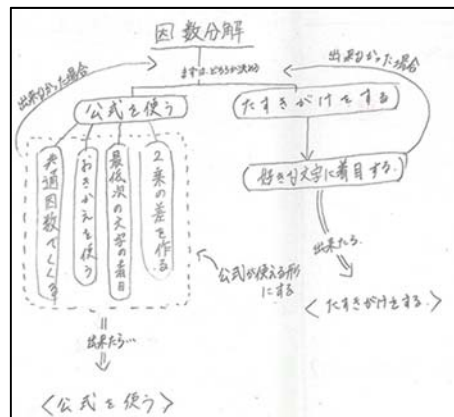


図3 関連記載型(コンセプトマップ)

関連記載型 (情報システム記載手法による図) は、クラス図やシステム構成図のように、情報システムを記載するための方法を利用し記載された図とする。関連記載型 (情報システム記載手法による図) の例を図4に示す。なお、図4はクラス図の記載方法を利用している。

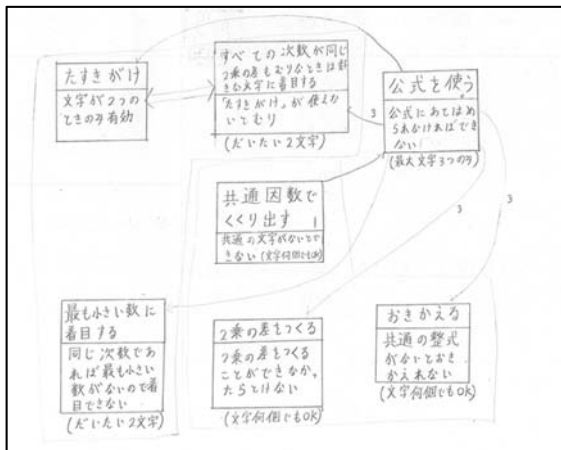


図4 関連記載型 (情報システム記載手法による図)

関連記載型 (包含関係) は、ベン図を利用して記載された図とする。関連記載型 (包含関係) の例を図5に示す。

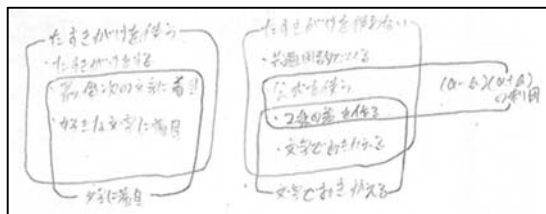


図5 関連記載型 (包含関係)

学生による図の作成状況を表2にまとめる。

4. 分析と考察

学生が因数分解の視覚化として作成した図を、4月に実施した計算力試験の因数分解分野の正答数、前期中間試験の因数分解分野の正答数とともに分析する。

4.1 各試験の因数分解分野の問題

計算力試験では6問を出題した。各問題で問うて

表2 学生による図の作成状況

項番	図の種類		人数
I	手順記載型	分岐あり	18人
II		分岐なし	7人
III	関連記載型	コンセプトマップ	4人
IV		情報システム記載手法	2人
V		包含関係	0人
VI	IとIIIの両方		3人
VII	IとVの両方		1人
VIII	IIとIIIの両方		1人
IX	文章のみ		1人
X	作成途中 (未記入を含む)		3人
XI	未提出		1人

いる事項は次のとおりである。

- (1) 共通因数のくり出し
- (2) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ の適用
- (3) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$ の適用
- (4) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$ の適用
- (5) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ の適用
- (6) 共通因数のくり出しののちに

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

前期中間試験では7問を出題した。各問題で問うている事項は次のとおりである。

- (1) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ の適用
- (2) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ の適用 (中学)
- (3) 好きな文字に着目する
- (4) たすきがけ
- (5) 最低次の文字に着目する
- (6) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ の適用 (中学)
- (7) 置き換えをしたのちに共通因数でくり出し

このうち、(2) (6) は中学校での学習事項である。

4.2 前期中間試験の正答数別の図の特徴

計算力試験における因数分解分野の正答数別人数を表3に示す。

表3 計算力試験の因数分解分野の正答数別人数

正答数	6問	5問	4問	3問	2問	1問	0問
人数	25	13	2	0	0	0	1

38名の学生が5問以上に正解している。正答数が0問の学生は、試験中の体調不良により途中から受験を放棄した学生である。計算力試験の結果から、

中学校における因数分解は、ほぼ全員が理解できていると考えられる。

前期中間試験における正答数別の図の作成状況を表4にまとめる。表4からは次の事項が読み取れる。

前期中間試験の7問のうち6問以上に正解した12名のうち、手順記載型（分岐あり）を含むの図を作成した学生（I, VI, VII）は、10名である。また、関連記載型だけの図を作成した学生は0名である。特に、7問全てに正解した5名は、全員が手順記載型（分岐あり）の図を作成している。これらのことから、因数分解の問題を解くことができる学生は、手順記載型（分岐あり）の図を作成できると考えられる。

表4 正答数別の学生による図の作成状況

正答数	作成した図の種類										
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
7問	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6問	3	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
5問	6	3	0	1	0	1	0	0	1	2	0
4問	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3問	3	3	2	1	0	0	0	0	0	1	0
2問	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1

(注) 表中のI～XIは表2の項番I～XIに対応

手順記載型（分岐あり）を含む番号に下線を引いた正答数1問0問の学生は0名のため記載していない

一方、正答数が3問以下の学生13名のうち、手順記載型（分岐あり）の図を作成できた学生は3名にとどまっており、関連記載型の図を作成する学生が5名と増加している。なお、正答数が少ない学生が作成した関連記載型の図は、関連事項が適切に線で結ばれていた。図3は正答数3問の学生が作成した図である。このことは、コンセプトマップや情報システムを表現する手法を用いて関連を記載できたとしても、必ずしも因数分解ができるわけではないことを表している。

筆者は、上述の結果から、学習事項の構造化ができていたとしても、その構造をどのように利用するかが理解できていないと、因数分解の問題を解くことはできないと考える。

類似する事例として、情報システムを構築する際に作成する一連の文書群がある。一般に、情報システムを構築する際には、システムの静的な構造を記載する構造図（クラス図など）とシステムの振る舞

い（動作）を記載する振る舞い図（シーケンス図など）を作成し、システムを理解する。構成図か振る舞い図のどちらか1種類だけの図を確認しても、システムの全体像の理解が不十分となる。また、1種類の図に双方を盛り込もうとすると、うまくいかないことが知られており、図の分類がなされている。

因数分解を一つのシステムだと考えると、因数分解を理解するには、因数分解の構造を表す図と動作を表す図の2種類が必要になる。今回の視覚化においては、関連記載型の図が構造を表す図に相当し、手順記載型の図が動作を表す図に相当している。

以上のことから、筆者は、視覚化を学習指導に盛り込む際には、学習事項の構造を表す観点の図による視覚化と、学習事項をどのように動作させるかの観点の図による視覚化が必要と考える。

5. まとめ

本研究では、学生による因数分解の視覚化の結果を分類し、試験における因数分解の正答数とともに分析した。その結果、因数分解の正答数が多い（7問中6問以上）学生は、手順記載型（分岐あり）の図を作成できていること、因数分解の正答数が少ない（7問中3問以下）学生は、関連記載型の図を作成する傾向があることを明らかにした。また、情報システムを構築する際の図の作成事例との比較により、視覚化を伴う指導には、手順記載型のような動作を表す図と関連記載型のような構造を静的に表す図の双方が必要であるという示唆を得た。

今後の課題は、動作を表す図と構造を表す図の2種類の観点からの視覚化を伴う実践を行い、その効果を確認することである。

引用・参考文献

- [1] 南郷毅: 因数分解指導における視覚化について, (弓削商船高等専門学校紀要, 第38号), pp. 45-49, (2016)
- [2] 堤厚博: 数学教育における視覚化を用いた試み—初年次生を対象とした視覚化による数式の理解度向上(その1)—, (工学教育研究講演会講演論文集, 平成26年度(62)), pp. 320-321, (2014)
- [3] 堤厚博: 数学教育における視覚化を用いた試み—初年次生を対象とした視覚化による数式の理解度向上(その2)—, (工学教育研究講演会講演論文集, 平成27年度(63)), pp. 98-99, (2015)

- [4] 白坂繁：部分積分の新指導法の有効性（日本数学教育学会誌，第 81 卷臨時増刊），p. 425，（1999）
- [5] 篠原宗弘：高等学校数学におけるコンセプトマップを利用した教育実践とその考察（第 36 回数学教育論文発表会論文集），pp. 451-456，（2003）
- [6] 安宅隆：コンセプトマップを活かした，総合的な考え方を育む指導の検討（第 48 回秋期研究大会発表集録），pp. 113-116，（2015）