$\mu = \tan\theta$

梶山　裕二*

$\mu = \tan\theta$

Yuji Kajiyama*

Abstract

It is known that students have difficulties in learning frictional force in course of elementary physics, since it is invisible and it works differently under different situations (if the object is at rest or moving) . In this paper, we give examples of the relation $\mu = \tan\theta$, which relates the coefficient of static friction μ to an angle θ when the object is just about to move, in various situations. As educational benefits, by carefully discussing those examples, our work can be helpful for students for understanding frictional force.

1．はじめに

高専低学年、あるいは高等学校で学習する物理の重要なテーマとして摩擦力がある。物理の問題文では「ただし摩擦はないものとする」、「ただし空気抵抗はないものとする」といった物理特有の言い回しによってしばしば無視され、「ないはずがないだろう」と反論されることもある摩擦力であるが、では摩擦力や空気抵抗を無視しないで現象を解析しようとすると考慮すべき事柄が多くなるために困難を感じるようになる学生も多い。それにより、「まず簡単にして原理を知り、徐々に現実に近づける」という、物理学の手法である「現象の理想化・モデル化」の重要性を身を以て学ぶことになる。

また摩擦力は物理の学習以前に生徒が経験的に習得してきた「素朴概念（誤概念、misconception）」としてもしばしば登場し、物理を学習する障害となっていることが知られている[1,2]。例えば「力を加え続けない限り物体はやがて止まる（つまり慣性の法則など存在しないのである）」という典型的な素朴概念を持っている学生は、摩擦力を力として認識できていないために学習に困難を感じる。また静止しているときにはたらく摩擦力を常にμN（μは静止摩擦係数、Nは垂直抗力）で表される最大値としてのみ理解している学生もいる。この場合、なめらかな斜面上にひもでつながれて静止している物体と、あらい斜面上に摩擦力（静止摩擦力）によって静止している物体が本質的に同じであることが理解されないという報告もある[3,4]。このように、摩擦力は目に見えない力であることもあり、学習時に混乱を生じやすいテーマである。

この論文では摩擦力のうち、その物体にはたらき得る最大値である最大摩擦力μNについて議論する。摩擦力がμNと書ける事実はアモントン＝クーロンの摩擦の第１法則としても知られている。摩擦力に関する学習の中で、

$$\mu = \tan\theta \tag{1-1}$$

という式にしばしば出会う。ここで角度θは互いに直交するNとμNの合力と、Nとのなす角のことである（第２章の図２）。式（1-1）は、水平方向にはたらく最大摩擦力の大きさが鉛直方向にはたらく垂直抗力によって与えられるために成立する関係式である。本論文は様々な状況において、動き出す瞬間の力のつり合いから式（1-1）が得られることを見ることで、摩擦の学習の助けとすることを目的とする。

この論文の構成は以下の通りである。第２章では初等力学で学習する典型的な２例をレビューする。第３章では摩擦力がはたらく向きに特に注意を要する例として人間が走る場合に足に働く力を考える。第４章ではより定量的な考察を必要とする例として床に置いた物を最小の力で引っ張る際の条件を議論する。第５章でまとめを行う。

*　総合教育科

平成28年11月30日受理

2．典型的な二つの例

この章では、物理の基礎コースで学習する二つの典型的な例について議論する[5]。

2．1　斜面から物体が滑り落ちる角度

問1：斜面上に質量mの物体を置き、徐々に斜面の角度を上げていく。物体が滑り始める角度（摩擦角）θを求めよ。

解1：図1のように物体にはたらく力を描く。重力mg[1]を斜面に平行な方向と斜面に垂直な方向に分解する。角度θで物体が滑り落ち始める瞬間には摩擦力は最大摩擦力μNになるため、このとき物体にはたらく力のつり合いの式は

$$mg\sin\theta = \mu N, \tag{2-1}$$

$$mg\cos\theta = N, \tag{2-2}$$

となる。これより式 (1-1) が得られる。

このことは、図2のように力を描くとより直感的に理解できる。斜面に平行な方向にx軸、斜面に垂直な方向にy軸をとると、物体が滑り始める瞬間には二つの直交する力NとμNの合力（点線の矢印）がmgとつり合う。このときNとμNのなす角がθに等しくなるため、式 (1-1)が得られる。

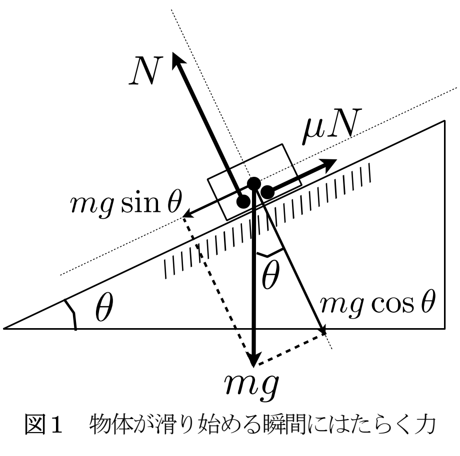

図1　物体が滑り始める瞬間にはたらく力

[1] この論文ではこれ以降重力加速度の大きさをgとする。

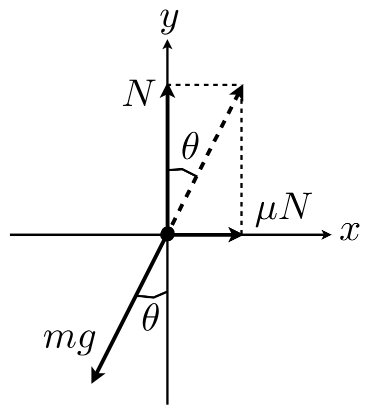

図2　NとμNの合力（点線の矢印）とmgのつり合い

2．2　立てかけた棒が倒れる角度

問2：質量m、長さℓの一様な棒をなめらかな壁に立てかけ、徐々に棒を傾けていく。棒が滑り始める角度θを求めよ。

解2：図3のように物体にはたらく力を描く。角度θで棒が倒れ始めるとき、棒が床から受ける摩擦力は最大摩擦力μNになっており、これが壁からの垂直抗力Rとつり合うことになる。水平方向と鉛直方向のつり合いの式は

$$R = \mu N, \tag{2-3}$$

$$mg = N, \tag{2-4}$$

また棒が回転しない条件として、A 点周りの力のモーメントのつり合いの式は

$$mg\sin\theta \cdot \frac{\ell}{2} - R\cos\theta \cdot \ell = 0, \tag{2-5}$$

となる。以上の式 (2-3)、(2-4)、(2-5) を解くと以下の関係式が得られる。

$$\mu = \frac{1}{2}\tan\theta. \tag{2-6}$$

式 (1-1)と$\frac{1}{2}$の因子だけずれているのは、棒には大きさがあり、力の作用点がそれぞれで異なっていることに由来する。すなわち、A 点から見て重力mgの作用点（重心）は距離$\frac{\ell}{2}$、壁からの垂直抗力Rは距離ℓだけ離れているためである。従って、仮に棒が一様ではなく重心がA 点から$\frac{\ell}{a}$の位置にある場合は、式 (2-6) は$\mu = \frac{1}{a}\tan\theta$となる。

直感的には図4から理解できる。垂直抗力Rと重力mgをB’点まで平行移動させ、つり合いの式 (2-3)、(2-4) を用いる。そしてその合力（点線の矢印）が線分 AB’上にあれば、A 点周りの力のモーメントはゼ

$$\mu = \tan\theta$$

ロということになり、回転しない（図４ではＡ点にはたらく力μNとNはもともと Ａ 点周りの回転に寄与しないため省略した）。このとき、相似な三角形の関係から

$$\tan\theta' = \frac{AC'}{B'C'} = \mu \tag{2-7}$$

$$\tan\theta = \frac{AC}{BC} \tag{2-8}$$

となり、重心の位置から$AC' = \frac{1}{2}AC$、また$BC = B'C'$であるので、式 (2-7) と (2-8) をまとめると式 (2-6) が得られる。

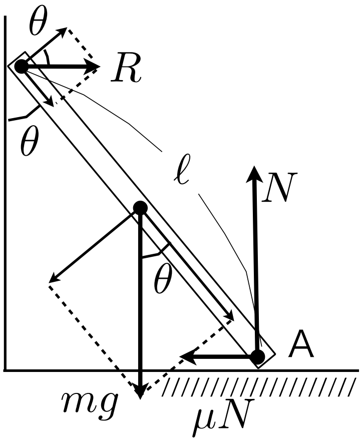

図３　棒が倒れ始める瞬間にはたらく力

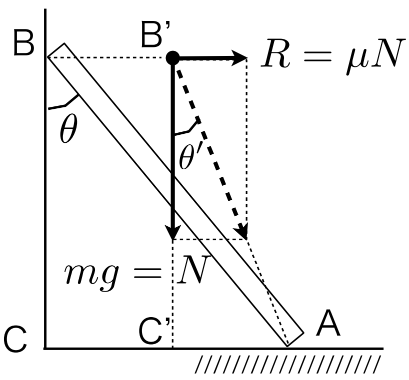

図４　つり合いの式を考慮し、Ａ点周りに回転しない条件を表した様子。Ａ点にはたらく力は省略

３．走る場合

特に摩擦力がはたらく向きに注意しなければならない一例として、人間が走るときに足と地面の間にはたらいている摩擦力を考える[6]。

問３：走るときに地面を足で蹴る際、蹴る力をいくらにすれば推進力を最大にできるか。

解３：簡単のために、すねを棒とし、足をその先についた球であると近似する。すねが鉛直方向からの角度θの角度にあるとき、足はすねによって鉛直下向きからの角度θの方向へ力を受け、これが地面を蹴る力として地面に伝わる（図５）。その水平成分をT、鉛直成分をFとすると、Tが地面を後に蹴る力になる。ここで、地面から足が受ける摩擦力の向きに注意が必要である。摩擦力は動く向きとは逆向きにはたらく力であるが、今の場合、前に走ることを妨げる後ろ向きの力ではない。もし摩擦がなければ、足を後に蹴ったときにはそのまま後に滑ってしまう。摩擦力はその「後に滑る」ことを妨げる効果を持つため、前向きにはたらくことになる。後ろ向きに地面を蹴る力Tの大きさによって、$T \leq \mu N$では足が滑らずに地面を蹴ることができ、$T > \mu N$のときは最大摩擦力を超えるので滑ってしまうことになる。足が滑らない限り、静止摩擦力は常にTとつり合いの関係にあり、Tが最大値をとるときは$T = \mu N$が成り立つ。このとき、

$$\tan\theta = \frac{T}{F} = \frac{\mu N}{N} = \mu \tag{3-1}$$

が得られる。ただし鉛直方向のつり合いの式$F = N$を使った。

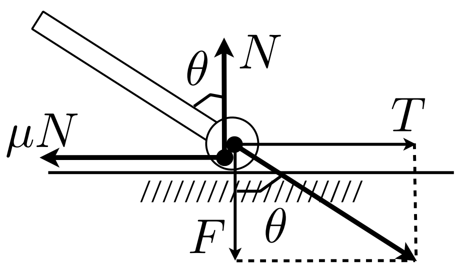

図５　推進力が最大になるときに足にはたらいている力

４．荷物を引く場合

ある状況において極値を求めるという場合に$\mu = \tan\theta$が得られる問題を考える。ここではより定量的な議論が可能になる。

問４：水平であらい床の上に置かれた質量mの物体にひもを取りつけ、水平面から角度θの方向へ引いた。物体を動かすのに必要な力が最も小さくなる角度を求めよ。

解４：図６のように物体にはたらく力を描く。動

き始めた瞬間の水平方向と鉛直方向のつり合いの式は

$$F\cos\theta = \mu N \tag{4-1}$$

$$F\sin\theta + N = mg \tag{4-2}$$

となる。この問題はある種のジレンマを引き起こす。より上に向かって引けば（θ を大きくすれば）物体を持ち上げる力が大きくなるため垂直抗力 N が小さくなり、最大摩擦力 μNは小さくなる。従って小さい F で動かせると思われそうであるが、そのときは横に引く力が小さいということであるので動きづらくなる。逆に横に引く力を大きくすると（θ を小さくすると）最大摩擦力 μN を小さくできないので、やはり動きづらくなる。θ を大きくするか小さくするか、どちらの方が動かしやすいのかというジレンマが生じる状況において両者のバランスが取れる角度 θ はいくらであるか、という問題である。

式 (4-1)、(4-2)より F を θ の関数として求めると、

$$F(\theta) = \frac{1}{\mu\sin\theta + \cos\theta}\cdot\mu mg \tag{4-3}$$

となる。数学的にはこの関数 $F(\theta)$ の極小値を与える θ を求めよ、という問題であるが、ここでは３通りの求め方を挙げる。

①高専低学年の学生や高校生など、微分を使った物理が未習である学生は三角関数の合成の公式 [7]

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi) \tag{4-4}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4-5}$$

を用いて求めることが適切であろう。式 (4-3) を書き直すと

$$F = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}\sin(\theta+\varphi)}\cdot\mu mg \tag{4-6}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}, \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}} \tag{4-7}$$

となる。F は $\sin(\theta+\varphi) = 1$ のとき極小値（最小値）

$$F_{min.} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}\cdot\mu mg \tag{4-8}$$

をとる。このとき、$\sin(\theta+\varphi) = 1$ に加法定理を適用して式 (4-7) を使うと式 (1-1) が得られる。

②高専高学年や大学初年次の、微分を学習した学生には式 (4-3)を θ で微分して極値を求めた方が簡単である。式 (4-3)を微分すると

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{(\mu\sin\theta+\cos\theta)^2}\cdot\mu mg \tag{4-9}$$

となるので、極値の条件より式 (1-1) が得られる。これは２階微分の符号が正であり確かに極小値になっているが、証明は省略する。

③力の矢印を (x,y) 平面のベクトルとして描いて考えることもできる。図７は物体が動き出す瞬間にはたらく力のつり合いを表している。ここで N と μN の合力は破線の矢印で描かれており、その N とのなす角 α は

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mu^2+1}}, \sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}} \tag{4-10}$$

と与えられる。この合力の始点をP、終点をQとすると、α は式 (4-10) によって与えられる固定値であるから、F の最小値とはつまり、原点と直線PQとの最短距離ということになる（図８）。これは明らかに原点から直線PQにおろした垂線の長さのことであるから、これより $\alpha = \theta$ となる。このとき式 (4-10) より、式 (1-1) が得られる。

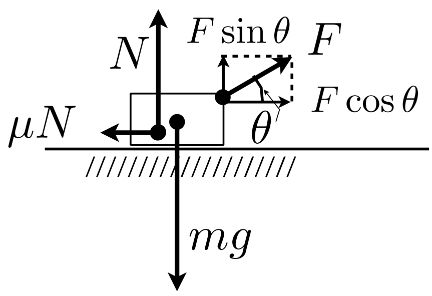

図６　物体が動き始める瞬間にはたらいている力

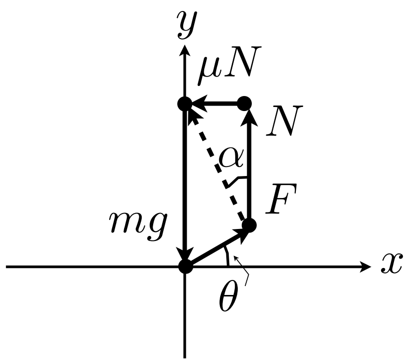

図７　(x,y) 平面のベクトルとしてのつり合いの式

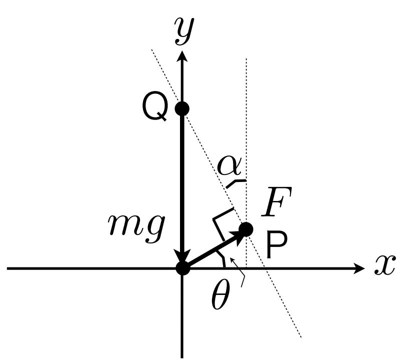

図８　原点から直線PQに下ろした垂線の F

$$\mu = \tan\theta$$

5．まとめ

この論文では、摩擦を学習する際に登場する

$$\mu = \tan\theta \tag{5-1}$$

という式に焦点を当て、この式が登場する様々な具体例について議論した。静止摩擦係数μは最大摩擦力μNとして現れるため、物体が「動き始める瞬間」を調べることで上記の公式が導出される。その中でも第３章では推進力が最大、第４章では荷物を引く力が最小、という更なる条件を加えたときに式（5-1）が得られる例を見た。他にも、物体が滑らずに回転する場合の転がり摩擦[8]や、摩擦力の原因を物質表面の凹凸によって説明するモデル[8,9]（ただしエネルギー保存則を考慮すると必ずしもこのモデルは正しくない）などにも同様の関係式が現れる。特に第４章の例で物体の大きさを考慮することにより、横に滑るのか回転するのかという異なる運動をする場合が生じることになり、力学の問題として興味深い。

アモントン＝クーロンの摩擦の第１法則「摩擦力は垂直荷重に比例する」に基づき、比較的簡単な計算によって様々な状況で共通の式（5-1）が得られる様子は、初等物理学を学ぶ学生にとって摩擦力の理解を深める上で助けとなると思われる。第３章の走る場合の例では摩擦力がはたらく向きという定性的な事柄に焦点をあてて学習することができる。前へ進むときに摩擦力が前向きにはたらく（走ることを妨げる向きではなく、足が滑ることを妨げる向きである）ことに気づくためには、足と地面にはたらく力の関係を正確に読み取ることができていなければならない。第４章の例では摩擦力が垂直荷重（垂直抗力）に比例するという、より定量的な事柄に焦点をあてることができる。ひもを引く角度の選択がジレンマを引き起こすことに気づくためには、その力を、荷物を引く水平成分と荷物を持ち上げる鉛直成分に分解して、それぞれの効果を理解できていなければならない。これらは摩擦力の学習を促す良い例題であると考えられる。

摩擦に関する授業実践として、筆者は本校における１年生物理の授業において、人気テレビ番組をもじって「すべらない物理」と題したゲームを行った。ベニアの板に様々な日用品を乗せ、学生に手伝わせて板を傾けていく。しばらくはどれも板上に残っているが、傾きが大きくなるといずれ限界がきて滑り出す。最後まで滑らずに残る物はどれかを学生に予想させるというゲームである。エントリーした日用品は、ぞうきん（乾いたものと濡れたもの）、ペットボトル（空のものと満タンのもの）、ガムテープ、紙ヤスリ、教科書、ペットボトルロケット、チョコレート、ドアストッパーなどである。このゲームにより、静止した状態、滑り出す瞬間、動いている最中という三種類の現象を体験することができる。特に滑り出す瞬間には本文の問１の状況に対応しており、学生は表面の「ザラザラ具合」である静止摩擦係数μを少なくとも無意識には念頭において予想しているため、その後の解説も含めて摩擦力の学習の一助とした。ただしその効果はまだ定量的に調べてはおらず、今後の課題とする。ちなみにこのゲームの正解者数は授業を行った順に１名、６名、２２名であった（常にぞうきんが優勝した）。

これらをもとに、摩擦力を可視化できる教材の開発等も含めて授業改善に活かしていきたい。

参考文献

[1] 新田英雄：素朴概念の分類，物理教育第 60 巻第１号 17，（2012）
[2] エドワード・F・レディッシュ：科学をどう教えるか，丸善出版，（2012）
[3] Andrea A. diSessa and Bruce L. Sherin : What changes in conceptual change?，Int. J. Sci. Educ. **20(10),** (1998)
[4] Chandralekha Singh : Effect of Misconception on Transfer in Problem Solving，AIP Conf. Proc. **951**, 196 ，（2007）
[5] 例えば、和達三樹監修・小暮陽三編集：高専の物理[第５版]，森北出版株式会社，（2000）
[6] 望月修：オリンピックに勝つ物理学，講談社，（2012）
[7] 例えば、高遠節夫ほか：新基礎数学、第日本図書 ，（2011）
[8] 例えば、田中久一郎：摩擦のおはなし、日本規格協会，（1985）
[9] Galen T. Pickett : A Pedagogical Model of Static Friction, ArXiv:1507.04015