一刀切りについて３
―設計図の作り方―

雙知　延行*・藤原　優伍**・安藤　来夢**・山下　正道**

About folding and one straight cut suffice 3
―How to make a design drawing―

Nobuyuki Sochi*, Yugo Fujiwara**, Raimu Ando**,
Masamichi Yamashita**

Abstract

By folding shape drawn by line segments on a sheet of paper and cutting the paper straight, it is possible to cut it out. We studied to make a design drawing about folding and one straight cut suffice.

１．一刀切り

１．１　一刀切り定理

一刀切り定理とは，１枚の紙の上に線分のみによって描かれた任意の描画において，紙を平坦に適切に折って，線分に沿ってただ１回のみハサミを入れることによって，描画の線分部分だけを切ることができる，というものである.

１．２　一刀切り定理の証明について

Eric Demaine 等により一刀切り定理が証明された. １９９９年，直線骨格法による「ほとんど全ての場合」の証明が発表された．その後，ディスクパッキング法による「すべての場合」の証明が発表された.

１．３　歴史と先行研究について

①　１７２１年に，日本の環中仙による著書の和国智恵較に一刀切りが紹介された．図形を一刀切りする技が紹介された.

②　１８７３年には，アメリカの Haper’s New Monthly Magazine において，一刀切りできるという理由で星形を国旗に使うことを，Betsy Ross がワシントンに説得したという話が紹介された.

③　１９２２年，手品師の Harry Houdini の著書の Paper magic で手品のタネとして星形の一刀切りが紹介された.

④　１９５５年，手品師の Gerald Loe の Paper Capers で複数の一刀切りが紹介された.

⑤　１９６０年，パズル作家の Martin Gardner によって，数学ゲームの１つとして一刀切りが紹介された.

折り紙はアジアに起源をもち１０００年を超える古い歴史があり，数学的な研究の歴史は浅く，現在も研究されている.

ここでは，折り紙を平面に平行に紙の層が積み重なった状態にする（平坦に折る）ことに関しての先行研究の結果を挙げておく．図１，図２は三角形，四角形の一刀切りの設計図である．内部の赤の実線が山折りで，赤の点線が谷折りを表す.

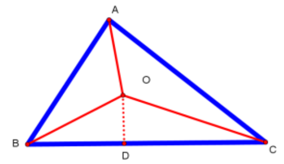

図１　三角形の一刀切りの設計図

*総合教育科
**弓削商船高等専門学校数学同好会「数学プリン」

平成 29 年 11 月 30 日受理

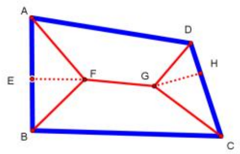

図２　四角形の一刀切りの設計図

まず，折り紙の設計図において，２本あるいはそれ以上の折り線が紙の境界以外の部分で交差しているところを頂点と呼ぶ．また，頂点から伸びる折り線の数を次数と呼ぶ．

①　偶数次数定理

平坦に折られた状態における頂点の次数は偶数である．

図１の三角形の内部にある頂点０から OA,OB,OC,OD の４本折り線が伸びており，この頂点における次数は４であり偶数である．図２の内部の２点 F,G においては，頂点 F に FA,FB,FE,FG と，頂点 G に GC,GD,GH,GF の４本の折り線が集まっているので，２点ともに次数は４であり偶数である．

②　前川＝ジェスタン定理

平坦に折られた紙で，M 本の山折り線と N 本の谷折り線が一つの頂点から伸びているとする．
このとき，M と N の差は２となる．つまり，
｜M－N｜=２となる．

図１の三角形内の頂点０から伸びている折り線において，山折線が OA,OB,OC の３本で谷折り線が OD の１本なので，｜3－1｜=２である．図２の内部の頂点 F においては，山

折線が FA,FB,FG の３本で谷折り線が FE の１本なので，|３－１|=２である．頂点 G においては，山折線が GC,GD,GF の３本で谷折り線が GH の１本なので，

|３－１|=２である．｜M－N｜=２となり，前川＝ジェスタン定理を満たしている．

２　一刀切りの設計図の描き方

２．１　設計図について

一刀切りの設計図作成の最初の段階は，三角形から始めて，多角形やアルファベットを線分のみで１枚の紙に描き，その紙を折って思案し，折り線を記入して設計図を考えた．凹四角形など複雑な図形も扱い，角の２等分線等の直線骨格を確認して作図する．設計図作成は，弓削商船高等専門学校数学同好会の研究テーマにした．数学同好会の活動において，Y,U,G,E をはじめとしたアルファベット一文字の一刀切りの設計図を上記のような方法で作成した．

前回の紀要に引き続き，描画ソフトのシンデレラを利用して設計図を作図した．シンデレラは角の２等分線や垂線等を簡単に正確に描くことができ，直線骨格等を描くのに適している．

２．２　作成方法

図形において角ができる場合に角の２等分線と，２等分線同士が交わる点同士を結んだ線分の集まりを直線骨格と呼ぶ．

図１において，内部の折り線 OA,OB,OC が山折りで，角の２等分線である（０は内心である）．点線 OD が谷折りで，辺 BC の垂線となる．垂線は AB や CA に下したものでも構わない．垂線を除いて，線分 OA,OB,OC が，この三角形における直線骨格である．図２の四角形においては，角の２等分線 AF,BF の交点 F と CG,DG の交点 G を結んだ線分も含めて，角の２等分線 AF,BF,CG,DG と線分 FG が，この四角形における直線骨格である．

平坦に折って一刀切りするためには，角の２等分線などの直線骨格や垂線などが折り線となる．このとき，紙が平坦に折られていなければいけないので，頂点は偶数次数定理と前川＝ジェスタン定理を満たしている．また，頂点に集まる角において，平坦に折られているときは，任意の角とその隣りの隣りにある角の和が 180°になることも分かっている．図３，図４のように，実際に角をなしていなくても，AB,CD を延長した交点０のなす角 AOC を想定して２等分線を折り線と考えて設計図を作図する．２つの図形の同時一刀切りの際は，２つの図形の線分を図３の AB と CD に先にそれぞれ重ねておいて，最後に２等分線で AB と CD を一直線上に重ねると，全ての図形の線分を一直線上に重ね合わせることができる．特別な場合として，AB と CD が平行の場合は，AB と CD に平行でその中間を通る直線で折れば図形の線分を一直線上に重ね合わせることができる（図５）．

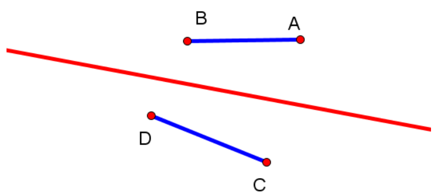

図３　２線分の折り線

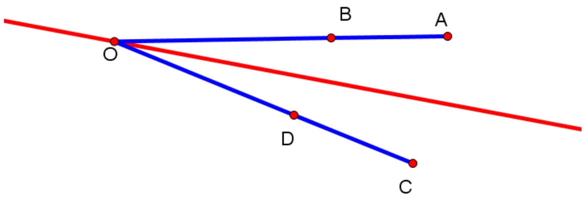

図４　２線分のなす角を想定した折り線

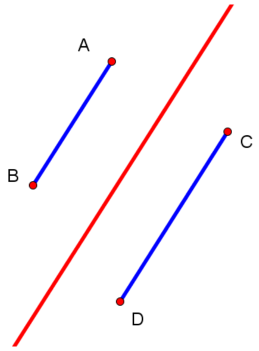

図５　平行線の折り線

２．３　同時一刀切りの設計図の具体例

同一紙面内に，２つ以上の図形が別々にあったとしても，あるいは，図形の中に図形があったとしても，適切に折りたたんで，たった１回だけハサミを入れることによって，同時に図形のみを切ることができる．ここでは，三角形の中の三角形と，同一紙面内の三角形と四角形の同時一刀切りの設計図を示す．

角の２等分線(平行でない２線分の場合は角を想定した２等分線，平行線の場合は中間の平行線)と２等分線の交点を結んだ線分を引き直線骨格を作図し，垂線を引く．

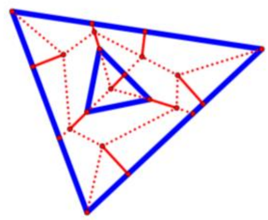

図６　三角形の中の三角形

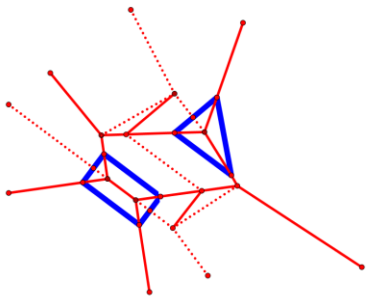

図７　三角形と四角形

図８において，イニシャル AK の設計図を示す．

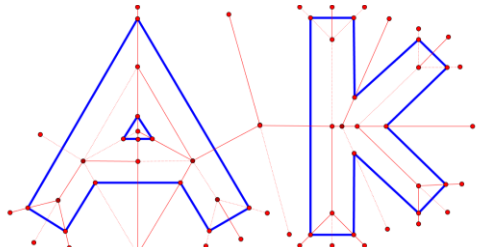

図８　AK

３．まとめ

今年度も，前年度に引き続いて，１枚の紙に書かれたアルファベット２文字（イニシャル）の同時一刀切りの設計図作成に挑戦し，作成方法についても考察した．角の２等分線などからなる直線骨格や垂線を引いてその線分を一直線上に集めることに数理があることを理解した．

２つの図形の同時一刀切りにおいて，図７のように２本の平行線上にそれぞれの図形の線分を集められる場合の作図は易しいが，図６や図８のように２本の線分を延長して角を想定して折る場合の作図は複雑になることもある．PC 上のソフトウエアを用いて，２等分線と２等分線同士の交点を結ぶ線分を引く作業を自動化して，さらに，平坦に折るための条件を考慮して自動描画ソフトを開発するつもりだ．

YUGE４文字の同時一刀切りの設計図も完成したので，シンデレラで作図する予定である．

参考文献

[1]　ジョセフ・オルーク：折り紙のすうり，pp. 91-105，2012

[2] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke : Geometric Folding Algorithms, Linkages, Origami, Polyhedra. Cambridge University Press, July , 2007.

[3] 雙知延行, 吾籐秀亮他：一刀切りについて―三角形からアルファベットまで―, 弓削商船高等専門学校紀要　第 38 号, pp.39-44, 2016

[4] 雙知延行, 藤原優伍他：一刀切りについて２, 弓削商船高等専門学校紀要　第 39 号, pp.34-40, 2017

[5] 雙知延行：一刀切りについて―2 つ以上の同時切り―, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌 第 23 号, pp.67-76, 2017

[6] 秋山仁　松永清子：数学に恋したくなる話, pp.218-220, 2010