

材料強度数値シミュレーション教育の実践

木下 つる代*・政家 利彦**・鶴 秀登***

Practice on the simulation by a numerical analysis of strength of materials

Tsuruyo Kinoshita* , Toshihiko Masaie** and Hideto Tsuru***

Abstract

Simulations by some numerical analyses have come to be used in various industrial fields with the development of computer and software. Therefore, it is important for students in advanced course to educate simulating technique. This paper presents an education of the simulation on strength of materials by a numerical analysis in the production system engineering course. Analyses are done on basic problems to understand the Finite Element Method and to examine the accuracy of the results. Moreover, some numerical calculations on one problem are carried out under different boundary conditions. This paper is useful for students and engineers in beginning to learn the simulation on strength of materials by means of Finite Element Method.

1. 緒言

コンピュータ技術の発展とともに数値シミュレーションは航空宇宙、自動車、建築、医療などさまざまな産業分野において広く利用されるようになった。そのため、専門的知識と技術を要求される高等専門学校生への数値シミュレーション教育は、実験解析の教育とともに重要である。本論文は、本校専攻科生産システム工学専攻の生産システム工学演習（週1コマ、15週）で行っている材料強度評価のための数値シミュレーション教育についてまとめたものである。

まず材料力学や強度設計で学んだ理論を数値解析で検証する。一例として一様な板の引張りによって生じる応力と伸びを求める中で、二次元弾性問題の解析におけるソフトの使用法、境界条件の与え方および結果の考察方法などを学ぶ。また中実丸棒の引張りや内外圧を受ける円筒問題などは軸対称問題であり、軸対称要素を選択して二次元問題と同様に扱い解析する。そして、軸対称問題の応用例として丸棒が円周切欠きをもつ問題を取扱う。その際、応力集中問題の弾性解析における要素分割と数値結果の関係について学ぶ。

次に、弾塑性解析として、切欠きをもつ板の切欠き底からの塑性降伏現象について解析をする。これらの数

値解析には、市販の有限要素法を用いた汎用プログラムソフト Marc を用いる。

本演習は、材料挙動の可視化を通して強度評価の理解を深めてもらうことと、数値結果の精度を吟味するという手順を経験させることが主目的であり、そのために適宜各種問題を用意して数値解析を実行できるように配慮している。なお、学生の演習時間は限られているためソフトの基本的使用方法については「Marc Mentat 2011 (classic)簡易マニュアル」を用意する^{[1][2]}。

2. 有限板の一樣引張り

2.1 有限板の一樣引張り

有限板の二次元弾性解析を行う。解析対象は図1に示す幅 $2W=100[\text{mm}]$ 、長さ $h=200[\text{mm}]$ および板厚 $t=1[\text{mm}]$ の軟鋼製（ヤング率 $E=206 \times 10^3 [\text{N/mm}^2]$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ ）の有限板で、 y 方向に一樣引張り σ_0 を与える問題である。垂直応力を σ 、せん断応力を τ 、ひずみを ϵ とすると、この問題の解は式(1)で与えられる。添字は定義に従った x, y 成分である。

このように x 軸と y 軸に対称な問題の場合、図2に示す 1/4 形状の解析モデルを用いる。その際、境界条件として x 軸、 y 軸上が軸と垂直方向に変位しないこ

*技術支援センター

**電子機械工学科

***非常勤講師

とを与えれば良い。理論的には全体モデルの中央1点(座標の原点)を0で固定して解析することと同じであるが、数値解析では理論と差異が生じる。そのことを経験し、そして1/4モデルを用いることの妥当性を確認する。

$$\begin{aligned} \text{応力} \quad & \begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = \sigma_0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \\ \text{伸び (y方向)} \quad & \varepsilon_y h = \frac{\sigma_0}{E} h \\ \text{縮み (x方向)} \quad & \varepsilon_x \cdot 2W = \nu \varepsilon_y \cdot 2W = \nu \frac{\sigma_0}{E} \cdot 2W \end{aligned} \quad (1)$$

まず、解析モデルの要素分割を行う。Marc Mentatを用いて解析モデルを自動で四角形要素に分割する場合、①QUADRILATERALS (OVERLAY) と②QUADRILATERALS(ADV FRNT)の2種類の平面要素(2D PLANAR)がある。長方形モデルの形状を分割すると、図3に示すように直角の隅が①では要素形状がいびつになる。そこで、ここでは要素分割には②を使用することにする。そして解析を表1に示す2つのパターンの境界条件で行う。ここで w は x 、 y 軸に垂直な軸(z 軸)まわりの回転(ROTATION)である。

パターン1では全体モデルの中央1点(原点)のみ x 軸方向変位(DISPLACEMENT) u および y 軸方向変位 v を0で固定する。また y 軸方向の等分布引張荷重として単位長さ当り $10[\text{N/mm}]$ を端辺(エッジ)に負荷する。解析モデルの板厚が $1[\text{mm}]$ であるので、この等分布荷重は $10[\text{N/mm}^2]$ の作用応力に相当する。入力圧力(PRESSURE)で与えるようになっているのでマイナスの値を入力する。解析の結果、パターン1の条件では変位などに回転したようなコンター図が得られる。そこで次に回転固定も必要と考え、パターン2の変位固定と回転固定の両方の拘束条件で解析を行う。結果は回転を0で固定したにもかかわらず、パターン1と同様に正しい解が得られない。全体で要素分割する場合、対称である点が要素分割後に対称節点とは必ずしもならず、対称性による似た係数をもつ連立方程式となり、解の安定性を欠いたためと考えられる。図4は1/4モデルで解析した場合の y 軸方向変位のコンター図で、式(1)と一致する。これらの結果から、対称性をもつ問題ではその片側のみを解析領域として解析する必要があることを確認できる。

表1 境界条件 (図1の問題)

	パターン1	パターン2
原点の x 方向変位 u	0	0
原点の y 方向変位 v	0	0
z 軸まわりの回転 w		0
端辺の圧力 $[\text{N/mm}^2]$	-10	-10

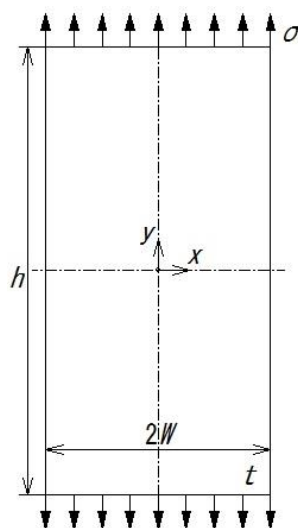


図1 解析対象 (長方形板)

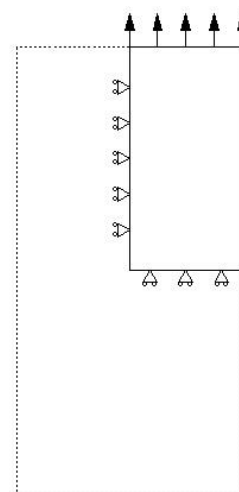
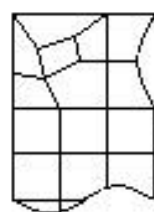
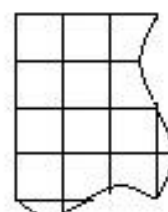


図2 解析モデル



①OVERLAY



②ADV FRNT

図3 要素の自動分割 (直角近傍の要素)

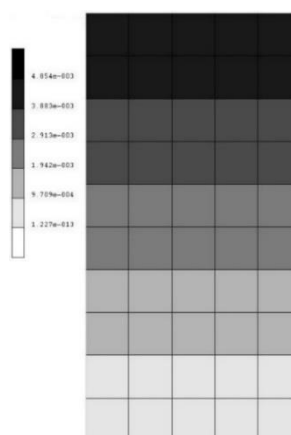


図4 y 軸方向変位 v のコンター図 (1/4 領域)

2.2 中央に円孔を有する板の引張り

図5に示す直径($2a=20[\text{mm}]$)の円孔を中央に有する幅 $2W=100[\text{mm}]$ 、長さ $h=200[\text{mm}]$ および板厚 $t=1[\text{mm}]$ の有限板の一樣引張り問題を取扱う。荷重条件および形状の対称性を考慮して、解析は図6に示す全体領域の1/4で行う。その際、境界条件として図6に示すように y 軸上の x 方向変位 u と x 軸上の y 方向変位 v を0で固定する。また、 y 軸方向の一樣引張応力 $\sigma_0 = 100[\text{N/mm}^2]$ を端辺に負荷する。

円孔などの切欠きを有する板が引張りなどの負荷を受けている場合、切欠き近傍には応力集中現象が生じる。図5の問題では切欠き底の点Aで最大応力が発生し、その近傍での応力変化が大きいので点A付近の要素分割は細かくする必要がある。また、要素形状は高アスペクト比や鋭角・鈍角をもつ四角形では精度に悪い影響を与えるので、正方形に近い形状が望まれる。これらのことを考慮に入れて円孔縁の1/4の分割数 n を10, 20, 30と変化させて解析を行う。なお、その他の辺の分割数は要素形状が正方形に近づくようにそれぞれ設定する。最大応力を $\sigma_{\max}$ 、公称応力を σ_0 とすると応力集中係数 $\alpha = \sigma_{\max} / \sigma_0$ で定義され、この問題の厳密解は式(2)³⁾に本解析の $a=10$ 、 $W=50$ を代入して $\alpha=3.15$ が得られる。図7に分割数 n による応力集中係数 α の収束状況を示す。

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} = 3 + 3.5469 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 6.5859 \left(\frac{a}{W} \right)^4 + 2.4298 \left(\frac{a}{W} \right)^6 - 0.5339 \left(\frac{a}{W} \right)^8 \quad (2)$$

孔縁の分割数を増やして解析するにつれて数値結果が厳密解に近づくことが確認できる。分割数30では、厳密解とほぼ一致し、十分な精度で解が得られることがわかる。この項では、切欠きの大きさを種々変化させて応力集中への影響を調べる場合、切欠き縁の分割数と結果の関係を良く検証しなければならないことがわかる。

3. 丸棒や円筒の問題

3.1 一樣引張り

丸棒や円筒の一樣引張り問題は、軸対称要素を用いることで二次元問題と同じように取扱える。軸対称要素を使用する場合には、全体座標系の xy 平面($0 \leq y, z=0$)でモデルを作成し、軸対称軸を x 軸にする必要がある。図8に長さ $L=40[\text{mm}]$ 、直径 $d=10[\text{mm}]$ の軟鋼製丸棒の引張り問題を示す。端辺に軸方向の引張応力 σ_0 を圧力 $100[\text{N/mm}^2]$ で負荷する。荷重条件および形状

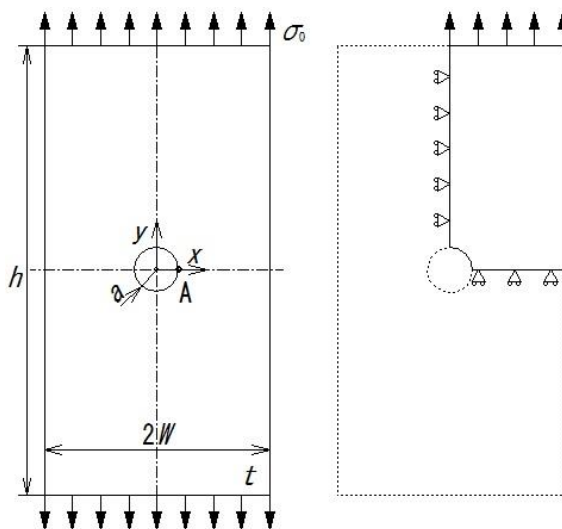


図5 解析対象

(切欠きをもつ長方形板)

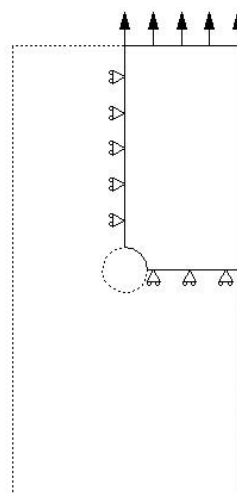


図6 解析モデル

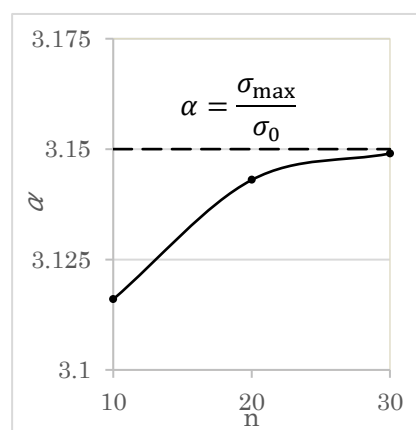


図7 孔縁の分割数 n と応力集中係数 α

の対称性を考慮して、図9に示す丸棒材の1/4部分を解析領域とし、その部分を軸対称要素で分割する。弾性解析の場合、解析に必要な材料定数はヤング率 $E=206 \times 10^3[\text{N/mm}^2]$ およびポアソン比 $\nu=0.3$ の2つである。この問題の変位は次式で与えられる。

$$u = \varepsilon_{xx} L \quad \left(\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \right) \quad (3)$$

$$v = \varepsilon_{yy} d \quad \left(\varepsilon_{yy} = -\nu \varepsilon_{xx} \right) \quad (4)$$

数値解析は表2に示す2つのパターンで行う。パターン1の境界条件は、図9に示すように丸棒中心軸である x 軸上の y 軸方向の変位 v および y 軸上の x 軸方向の変位 u を0で固定する。そして x 軸方向の一樣引張応力 $\sigma_0=100[\text{N/mm}^2]$ を端辺に負荷する。端面における x 軸方向の変位 u および y 軸方向の変位 v は式(3)お

よび(4)に本解析のデータを代入して $u=0.0194$, $v=-0.00146$ が得られる。数値結果は、分割数に関係なくこれらの値と一致する。なお、解析モデルを考えると得られる数値はそれぞれ $1/2$ の値となる。

次に、パターン2の条件として x 軸上の y 方向変位 v を拘束しない場合で解析する。数値結果 u, v はパターン2でも理論値と一致する。また応力のコンター図にもパターン1との差が見られないことから、軸対称問題の弾性解析では対称軸である x 軸上の拘束は必要ないということが確認できる。なお図10, 11にこの問題の変位 u および v のコンター図を示す。

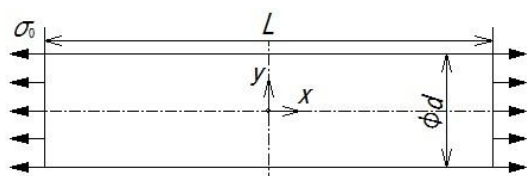


図8 解析対象 (中実丸棒)

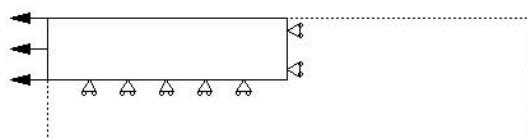


図9 解析モデル

表2 境界条件 (図9の解析モデル)

	パターン1	パターン2
y 軸上の x 方向変位 u	0	0
x 軸上の y 方向変位 v	0	
端辺の圧力[N/mm ²]	-100	-100

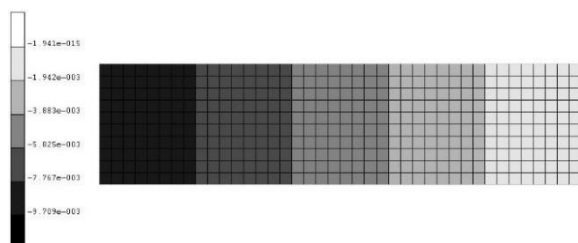


図10 中実丸棒の x 方向変位 u のコンター図

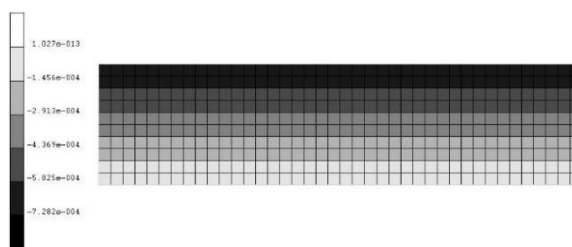


図11 中実丸棒の y 方向変位 v のコンター図

3.2 半円環状切欠きをもつ丸棒の引張り

図12に示す長さ $L=20$ [mm]、直径 $d=10$ [mm]の丸棒に、切欠き半径 $r=1$ [mm]の半円環状切欠きを有する問題を取扱う。端辺に軸方向の一樣引張応力 $\sigma_0 = 100$ [N/mm²]を負荷する。この問題も軸対称問題であり、軸対称要素を用い、荷重および形状の対称性を考慮して図13に示す丸棒縦断面の $1/4$ 領域で解析できる。境界条件は y 軸上の x 軸方向変位 $u=0$ と端辺の x 軸方向引張応力 100 [N/mm²]の負荷である。

図14に切欠き縁を5等分するような自動分割で数値計算して得られた x 軸方向の垂直応力 σ_{xx} (Comp 11 of Stress)のコンター図を示す。切欠きで最大応力 $\sigma_{\max} = 332.3$ [N/mm²]が得られる。式(2)で示す定義では応力集中係数 $\alpha=3.32$ となるが、応力集中係数 α' を次式(5)を用いて定義すると $\alpha' = \sigma_{\max} / \sigma_n = 2.13$ となる。ここで、式(5)の公称応力 σ_n は、切欠き底最小断面積が全体の荷重を一樣に受けもつと考えた場合の応力である。

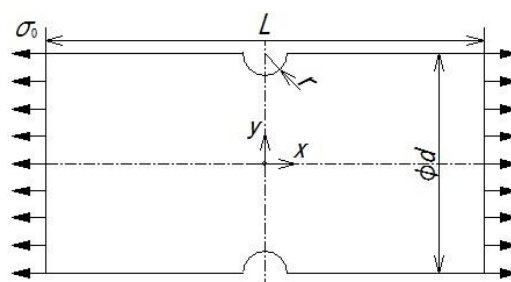


図12 解析対象 (環状切欠きをもつ丸棒)

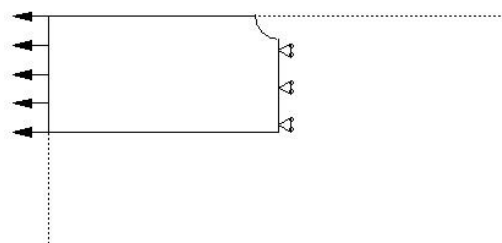


図13 解析モデル

$$\sigma_n = \frac{d^2}{(d-2r)^2} \sigma_0 = \frac{1}{\left(1-\frac{2r}{d}\right)^2} \sigma_0 \quad (5)$$

環状切欠き材の応力集中係数の厳密解は $\alpha'=2.196$ ^[4]であり、本計算結果は誤差 3.0%と良い結果を得ている。

なおこの応力集中係数の定義を 2.2 項の円孔問題に用いると $\alpha'=2.52$ となる。このように応力集中係数は定義によって数値が異なり、どの定義を用いるかは現象を説明しやすくするように選択すれば良い。

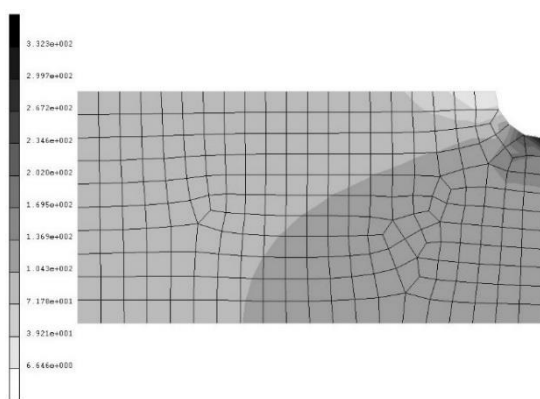


図 14 半円環状切欠きの方向の垂直応力 σ_{xx} のコンター図

3.3 中空円筒の内外圧問題

3.3.1 外圧問題

図 15 に示す長さ $L=20$ [mm]、内径 $2a=8$ [mm]、外径 $2b=10$ [mm] で肉厚 1[mm] の中空円筒に、外圧 $p_o=10$ [N/mm²]、内圧 $p_i=0$ を負荷した場合を解析する。荷重および形状の対称性を考慮して、軸対称要素を用い図 16 に示す中空円筒縦断面の 1/4 領域で解析する。境界条件として y 軸上の x 軸方向の変位 u を 0 で固定し、外周端面に外圧 $p_o=10$ [N/mm²] を負荷する。

まず数値結果が内周と外周における境界条件を満たしているかどうかを検討する。 y 軸方向の垂直応力 σ_{yy} はそれぞれ 0 [N/mm²] と -10 [N/mm²] であるが、肉厚の分割数 $n=8$ での数値結果は 1.410 と -9.924 となり、境界条件を十分に満たしていない。原因は肉厚方向の応力変化に対して分割が粗いことが考えられる。そこで要素分割の粗密が解析精度に与える影響を調べるため、肉厚の分割数 n を 10 と 20 で同様の解析を行い、図 17 に分割数 n での内外円周上の σ_{yy} を示す。分割数が大きくなるにつれて精度の向上が見られる。数値結果は分割数 20 で外周の応力誤差が 3.0%であり、精度の良い解析が実行できている。今後は肉厚の分割数 20 を目安に解析を行うことにする。図 18 に分割数 8 および

20 による肉厚内部の垂直応力 σ_{yy} のコンター図を比較して示す。

この項では、境界条件の充足度から結果の精度が推定できることを示している。

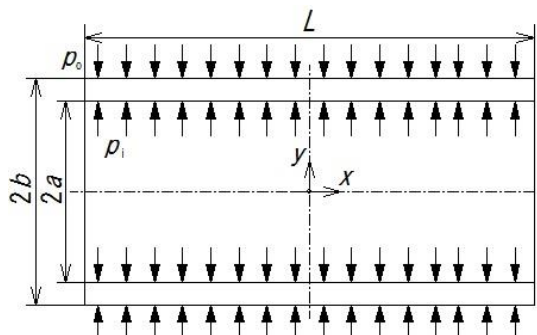


図 15 解析対象（中空円筒）

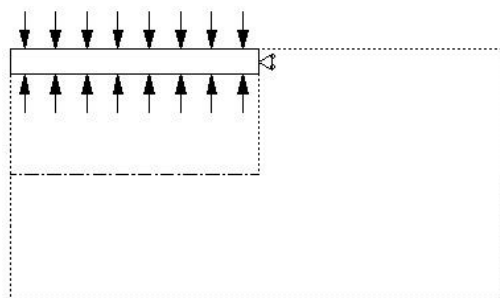


図 16 解析モデル

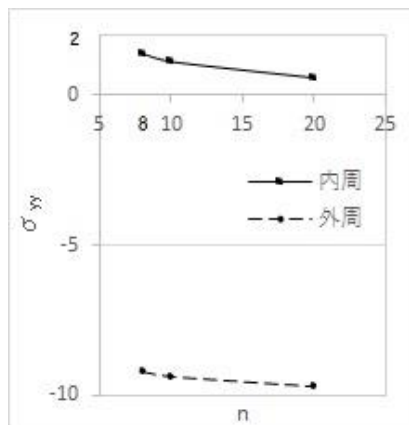


図 17 肉厚分割数 n での境界の垂直応力 σ_{yy}
($p_i=0$, $p_o=10$ [N/mm²])

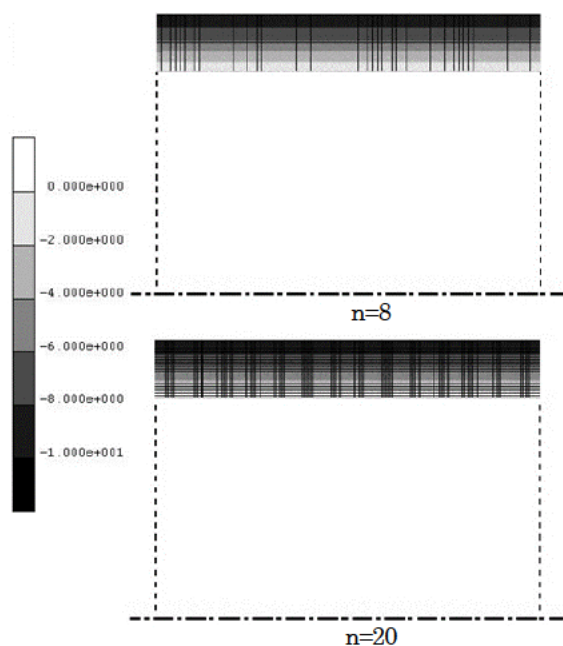


図18 肉厚に生じる垂直応力 σ_{yy} のコンター図
($p_i=0, p_o=10[\text{N/mm}^2]$)

3.3.2 肉厚に生じる応力の分布

肉厚分割数 $n=20$ での肉厚内部の y 軸方向垂直応力 σ_{yy} および z 軸方向垂直応力 σ_{zz} (Comp 33 of Stress) の数値結果を用いて、解の精度を理論式(6)および(7)と比較して図19に示す。数値結果が理論値とほぼ一致することがわかる。なお、外圧のみでは内周上 ($y=4$) の σ_{zz} (周方向垂直応力) の絶対値が最も大きくなり、外圧の5.6倍 ($a=4, b=5$ の場合) となることがわかる。

$$\sigma_{yy} = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{y^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (7)$$

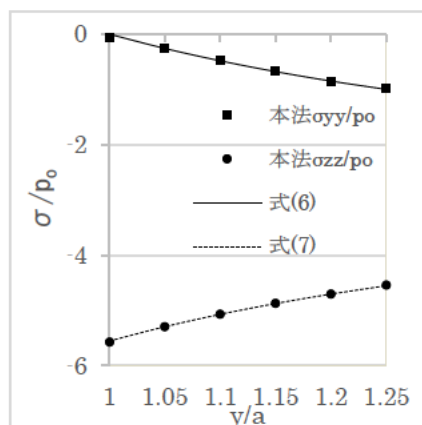


図19 数値結果と理論の比較($p_i=0, p_o=10[\text{N/mm}^2]$)

3.3.3 半径方向の変位

肉厚分割数 $n=20$ による円筒の内周と外周上の y 軸方向 (半径方向) 変位 v を、式(8)で与えられる理論と比較して表3に示す。また、図20に解析モデル領域における y 軸方向の変位 v のコンター図を示す。数値結果は理論値と一致している。このように前項の応力の精度より、変位の精度が高いことがわかる。

$$v = \frac{1}{E} \left[-\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{(1 + \nu)}{r} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} (1 + \nu) r \right] \quad (8)$$

表3 半径方向変位 v の数値結果($n=20$)と理論式(8)との比較

v	内周上($y=4$)	外周上($y=5$)
数値解 ($\times 10^{-3}$)	-1.08	-1.03
式(8) ($\times 10^{-3}$)	-1.08	-1.03

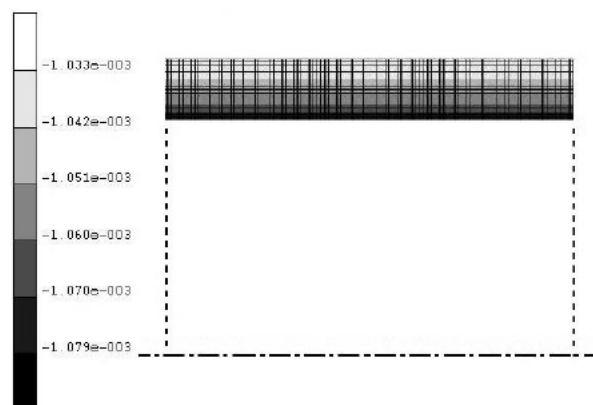


図20 変位 v のコンター図
($p_i=0, p_o=10[\text{N/mm}^2]$, $n=20$)

3.3.4 内外圧問題

図15に示す問題において前述の寸法を用い、外圧 $p_o = 10 [\text{N/mm}^2]$ 、同じく内圧 $p_i = 10 [\text{N/mm}^2]$ を負荷して数値計算を行う。図21に y 軸方向の垂直応力 σ_{yy} のコンター図を示す。結果は分割に無関係に一樣応力場が得られて一色になり、そのことは式(6)から確認できる。

応用として特殊な場合を計算したが、興味のある寸法形状と負荷応力で色々な現象を学ぶことができる。

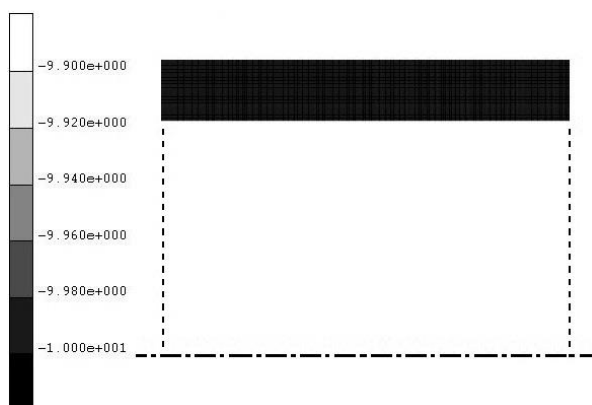


図 21 垂直応力 σ_{yy} のコンター図($p_i=p_o=10[\text{N/mm}^2]$)

4. 弾塑性解析

2.2 項で弾性解析を行った中央に円孔を有する板の一樣引張り問題を、材料の塑性降伏を考慮して弾塑性解析をする。弾塑性解析では材料定数としてヤング率 E 、ポアソン比 ν 、降伏応力 σ_Y および応力 σ とひずみ ε の関係が必要となる。ここでは式(9)の加工硬化則⁶⁾を用いる。なお使用する解析ソフトでは、入力する真応力 σ と真ひずみ ε の関係には弾性ひずみ成分 ε_e を除いた塑性ひずみ ε_p の値を用いなければならない。

$$\sigma = \sigma_Y + K\varepsilon^n \quad (9)$$

ここで K は塑性係数、 n は加工硬化指数(n 値)である。また、降伏応力 σ_Y に達するまでは当然弾性ひずみ ε_e のみで塑性ひずみ ε_p は 0 である。

数値計算はアルミニウム(A1050)と軟鋼(S35C)を想定して行い、加工硬化則の違いが降伏挙動に与える影響を比較する。表 4 に材料の機械的性質を示す。

表 4 アルミニウムと軟鋼の機械的性質⁶⁾⁷⁾⁸⁾

	E	ν	σ_Y	K	n
単位	N/mm ²		N/mm ²	N/mm ²	
A1050	72×10^3	0.3	30	160	0.3
S35C	206×10^3	0.3	305	1000	0.2

数値解析における解析モデルと境界条件は前項の弾性計算と同じであるが、負荷応力は降伏応力 σ_Y の 1.2 倍までを 12 ステップで行う。2 つの材料挙動が絶対値では大きく異なるため、降伏応力 σ_Y を基準に比率を合わせて降伏挙動を比較する。図 22 に負荷応力 $1.0 \sigma_Y$ における切欠き近傍の塑性相当応力 σ_{von} (Equivalent

Von Mises Stress)のコンター図を示す。両方とも切欠き底に高い応力が生じているが、応力分布は大差ないことがわかる。なお、この時の相当ひずみ ε_Y (Comp 22 of Total Strain)のコンター図を図 23 に示す。A1050 アルミニウム材では、ひずみの集中域が小さく孔の影響が局所的であるが、S35C 軟鋼材では孔近傍に大きいひずみ集中域が生じていることが確認できる。

この項で弾塑性解析の基本を学び、弾性解析における応力とひずみ関係とは異なる材料挙動を知ることができる。

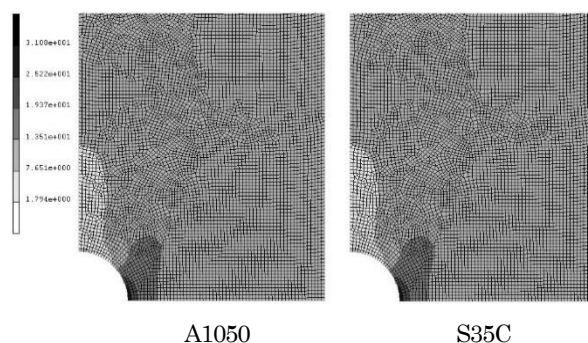


図 22 切欠き近傍の塑性相当応力分布 (負荷応力 $1.0 \sigma_Y$)

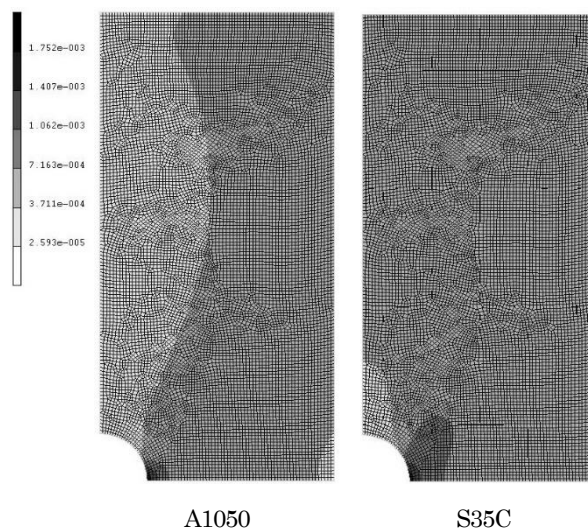


図 23 相当ひずみ分布 (負荷応力 $1.0 \sigma_Y$)

5. 結言

さまざまな産業分野において広く使用されるようになった数値シミュレーション技術を学び、身につけておくことは大切なことである。本論文では、学生が材料強度に関する知識を数値シミュレーションを通して習得できるように配慮した。試行錯誤しながら問題を

解く中で解析ソフトの使用法を学び、与える境界条件の重要さを知り、可視化された現象で材料挙動の理解を深めることができたと考える。疑問を持つ形状と材料についての応力と変形を知るために、解析モデルを作成し、数値実験を行う基本的なことはできるようになったと思う。またその結果の見方、精度評価法を学習でき、例えば分割数による結果の変動を知ることによって評価したり、似た問題の厳密解との比較によって推定したりする方法などを学んできた。本論文で取扱ったこれらの問題は材料強度の初歩的な内容であるが、数値解析の初心者が Marc を用いて強度解析を行う上で大変参考になると考えている。

参考文献

- [1] 坂根 政男：例題で学ぶ Marc 有限要素法解析入門，〈平成 23 年〉
- [2] 木下 つる代：Marc Mentat2011(classic)簡易マニュアル（実習用テキスト），〈平成 26 年〉
- [3] 石田 誠：日本機械学会論文集，第 21 巻，第 107 号，だ円孔を有する帯板の引張り（第 1 報），pp507-513，〈昭和 30 年〉
- [4] 西谷・他 2 名：機論，49-441, A, pp602-610，〈昭和 58 年〉
- [5] 益田 森治・室田 忠雄：工業塑性力学（改訂），〈平成 6 年〉
- [6] 大西 清：JIS にもとづく機械設計製図便覧（第 10 版），p4-4，〈平成 13 年〉
- [7] JIS 規格：アルミニウム及びアルミニウム合金の板及び条 JIS H 4000，〈平成 26 年〉
- [8] JIS 規格：機械構造用炭素鋼鋼材 JIS G 4051，〈昭和 54 年〉